'Master Manimala Series No. 145 (Jyautish Sec. 33)

THE CHALANA KALANA



[Chapters I—XX]

BY

MAHAMAHOPADHYAYA

PANDIT SUDHAKARA DVIVEDI.

EDITED BY HIS SON

PADMAKARA DVIVEDI JYAUTISHACHARYA

Late First Professor of Mathematics and Astronomy
Government Sanskrit College, Benares.

PUBLISHED BY

MASTER KHELARILAL & SONS.,

SANSKRIT BOOKDEPOT,

KACHAURI GALI, BENARES CITY.

1941

Price Rs. 2'8'-

Publisher.
J. N. Yadava Proprietor, Master Khelarilal & Sons,
Sanskrit Book-Depot, Kachaurigali, Benares City.

Printer.
Om Prakash Kapoor, Shri Lakshmi Narayan Press,
Jatanbar, Benares City.

'मास्टर' मणिमालायाः १४५ संख्यको मणिः (ज्यौतिषविभागे ३३)

॥ श्रीः ॥

चलन कलन

अध्याय १-१०

लेखक—

महामहोपाध्याय पं० सुधाकर द्विवेदी

सम्पादक—

पद्माकर द्विवेदी, ज्यौतिषाचार्य,

भूतपूर्व ज्यौतिषशास्त्र प्रधानाध्यापक,

राजकीय प्रधानसंस्कृत कालेज,

काशी।

प्रकाशक—

मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स,

संस्कृत बुकडिपो,

कचौड़ी गली, बनारस सिटी।

१९४१ ई०

मूल्य २॥) रु०

प्रकाशक—
जे० एन्० यादव
मास्टर खेलाड़ी लाल ऐण्ड सन्स्
संस्कृत बुकडिपो, कचौड़ीगली, काशी।



२१६-४१

मुद्रक—
ओ० प्र० कपूर,
श्रीलक्ष्मीनारायण प्रेस,
जतनबर, बनारस।

॥ श्रीगणेशाय नमः ॥

विबुध विविधभेदा बीजजाताः प्रसिद्धा-
बहुभिरपरदेशस्थैर्जनैस्सन्ति तेषु ।
चलनकलनसंज्ञं वच्मि चित्रं प्रणम्य
जनकनृपतनूजां कोशलेन्द्रस्य सूनुम् ॥

चलनकलन ।

अध्याय १ ।

चलराशियों के योग, अन्तर, गुणनफल, और लब्धिसम्बन्धि-
तात्कालिकसम्बन्ध के विषय में ।

१ । दो ऐसे राशि हों कि एक के परिवर्त्तन से दूसरे का भी परिवर्त्तन हो जाय तो एक राशि दूसरे राशि का फल कहलाता है, जैसे यदि, $य^{न} = र$ और जब, य बदल के य + च हो तब $(य + च)^{न} = र'$ तो र को य का फल कहेंगे । और य को स्वतंत्रराशि र को अस्वतंत्रराशि कहते हैं क्योंकि र का चलन यहाँ य के आधीन है ।

२ । जब, $य^{न} = र$ इस लिये $य = र^{\frac{1}{न}}$ और $(य + च)^{न} = र'$ इस लिये $य + च = य' = र'^{\frac{1}{न}}$ इससे यह सिद्ध होता है कि एक की अपेक्षा दूसरा स्वतंत्र वा अस्वतंत्र हो सकता है ।

३ । जैसे बीजगणित में अव्यक्त राशिओं का मान य, र, ल, व इत्यादि अक्षरों से दिखाए जाते हैं उसी तरह से यहाँ चल राशिओं के मान य, र, ल, व इत्यादि अक्षरों से लिखते हैं और बीजगणित की तरह अ, क, ग इत्यादि अक्षरों से यहाँ स्थिरसंख्या का मान लिखते हैं ।

४। जब $र = य^४ + ३ य^४ + २$, वा, $र = य^४ + २ य^३ + १$ इत्यादि, तो इनको लाघव के लिये र = फ (य) वा, र = फि (य) ऐसा लिखते हैं। यह, फ, फि, फा, इत्यादि अक्षर य के फल को द्योतन करते हैं। र = फ (य) यह दिखलाता है कि र के मान में केवल य चलराशि है और सब स्थिर हैं।

५। देखो—यदि $य^३ = र$ ऐसा समीकरण हो और कल्पना करो कि य का चलन च के तुल्य हुआ तब र का दूसरा मान $= (य + च)^३$ इस लिये य के च तुल्य चलन में र का चलन $= (य + च)^३ - य^३$ होगा इसे ऐसा लिखते हैं $\triangle र = (य + च)^३ - य^३$ और च को $\triangle य$ यों लिखते हैं। यहाँ $= (य + च)^३ - य^३ = ३ य^२ च + ३ य च^२ + च^३ = \triangle र$, दोनों पक्षों में च का भाग देने से $३ य^२ + ३ य \times च + च^२ = \frac{\triangle र}{\triangle य}$, य के रूप तुल्य चलन में र का चलन सिद्ध हुआ। परन्तु यह र का चलन जो अभी त्रैराशिक से सिद्ध हुआ है, च का मान भिन्न भिन्न होने से भिन्न भिन्न होगा इस लिये यदि च को शून्य के तुल्य मानो तो र का चलन, $३ य^२$ होगा। $३ य^२$ इसको य के रूप तुल्य चलन में र का एक-रूप चाल से, तात्कालिकचलन वा तात्कालिकगति कहते हैं। और इस को इष्ट य के तात्कालिकचलन से गुण देने से इष्ट य के तात्कालिक-चलन में एकरूप चाल से र का तात्कालिकचलन होगा अर्थात् $ताय \cdot ३ य^२ = तार \;\; \therefore \; ३ य^२ = \frac{तार}{ताय}$ अर्थात् $३ य^२$, को तात्कालिक-सम्बन्ध भी कहते हैं।

६। चलनकलन का मुख्य प्रयोजन यही है कि एक के तात्कालिक-चलन से दूसरे का तात्कालिकचलन जानना। और पूर्व प्रक्रम में जो $३ य^२$ इस का नाम र का तात्कालिकचलन रक्खा गया है यह ठीक है क्योंकि जैसा जैसा च का मान थोड़ा कल्पना किया जाय वैसा वैसा $य^३$ या, र, के पास पास के चाल से र चलेगा इस लिये यदि च को शून्य मानो तो ठीक, र उसी समय के चाल से चलेगा।

७। इस चलनकलन में चलराशि और स्थिरराशि के कहने से ऐसा समझना चाहिए कि, जैसा दो समानान्तर रेखा के बीच तुल्य आधार पर जितने त्रिभुज होंगे उन का क्षेत्रफल तो स्थिर परन्तु कोण चलराशि अथवा वृत्तान्तर्गत एक ही आधार पर एक ही ओर जितने त्रिभुज होंगे उन का शिरःकोण स्थिरराशि और फल चलराशि होगा इसी तरह हर एक जगह स्थिर और चल का अर्थ समझना चाहिये।

८। पाँचवें प्रक्रम से यह बात सिद्ध होती है कि स्वतंत्रराशि का च तुल्य चलन मान के अस्वतंत्रराशि का मान ले आवो फिर पूर्व अस्वतंत्रराशि और नवीन अस्वतंत्रराशि के अन्तर में च का भाग देके च को शून्य के तुल्य उत्थापन देने से तात्कालिकसम्बन्ध होता है

जैसे यदि $फ(य) = य^2$

तो $फ(य+च) = य^2 + २\,यच + च^2$

और $फ(य+च) - फ(य) = २\,यच + च^2$ इसमें च का भाग देने से और च को शून्य मानने से $\frac{ता\,(य^2)}{ताय} = २\,य$ यह, य के गति के वश $य^2$ के गति का तात्कालिकसम्बन्ध हुआ इसी तरह यदि

$फ(य) = \frac{अ}{य+क}$ तो $फ(य+च) = \frac{अ}{य+च+क}$

इन दोनों का अन्तर $= फ(य+च) - फ(य) = \frac{-अ \cdot च}{(य+क)\,(य+च+क)}$ इसमें च का भाग देकर च को शून्य के तुल्य करने से तात्कालिकसम्बन्ध $\frac{-अ}{(य+क)^2}$ इसके तुल्य हुआ, इसी रीति से हर एक जगह तात्कालिक सम्बन्ध निकालना चाहिये।

९। जैसे व्यक्तगणित और अव्यक्तगणित में जोड़ने वा घटाने की सुगम रीति गुणन, वर्ग, घन, वा भजन, वर्गमूल, घनमूल इत्यादि बुद्धिमानों ने बनाया है उसी तरह इस चलनकलन में चलराशियों के तुरन्त तात्कालिकसम्बन्ध जानने के लिये बुद्धिमानों ने अनेक चलराशियों के तात्कालिकसम्बन्ध निकाल निकाल कर उनके प्रकारों को

लिखे हैं जिनके अभ्यास से पढ़नेवाले सब प्रकार के चलराशियों का तात्कालिकसम्बन्ध जान सकते हैं।

प्रथम सिद्धान्त।

जब कि $र = स्थि \cdot फ (य)$

इस लिये $= र + \triangle र = स्थि \cdot फ (य + \triangle य)$

$$\triangle र = स्थि \{ फ (य + \triangle य) - फ (य) \}$$

वा, $$\frac{\triangle र}{\triangle य} = स्थि \left\{ \frac{फ (य + \triangle य) - फ (य)}{\triangle य} \right\}$$

$\triangle य$ इसको शून्य के तुल्य करने से

$$\frac{तार}{ताय} = स्थि \times तासं \circ फ (य)$$

इससे यह सिद्ध होता है कि जो चलराशि का तात्कालिकसम्बन्ध हो उसे स्थिरसंख्या से गुण देने से स्थिरसंख्यागुणित चलराशि का सम्बन्ध होता है।

द्वितीय सिद्धान्त।

यदि $र = ल + व + स$ यहाँ पर, ल, व, स, य के भिन्न-भिन्न फल हैं।

तो, $\acute{र} = \acute{ल} + \acute{व} + \acute{स}$ इसलिये $\triangle र = \triangle ल + \triangle व + \triangle स$

या $\frac{\triangle र}{\triangle य} = \frac{\triangle ल}{\triangle य} + \frac{\triangle व}{\triangle य} + \frac{\triangle स}{\triangle य}$ वा, $\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय} + \frac{ताव}{ताय} + \frac{तास}{ताय}$

इससे यह सिद्ध होता है कि सब फलों के पृथक् पृथक् तात्कालिकसम्बन्धों का योग उन फलों के योग तुल्य चलराशि का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

इसी में यदि, $र = ल + व - स$ हो तो पूर्वोक्त युक्ति से

$\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय} + \frac{ताव}{ताय} - \frac{तास}{ताय}$ ऐसा होगा

और यदि $र = ल + स्थि$ के तो पूर्वोक्त युक्ति से

$\frac{तार}{ताय} = \frac{ताल}{ताय} + \frac{तास्थि}{ताय}$ परन्तु, $\frac{तास्थि}{ताय} = \circ$ होगा क्योंकि स्थिर-

संख्या का तात्कालिकचलन शून्य होता है इसलिये तात्कालिकसम्बन्ध भी शून्य होगा ।

तब $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ ऐसा होगा ।

तृतीय सिद्धान्त ।

यदि $\text{र} = \text{ल} \times \text{व} = \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$

तो $\text{र}' = \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}+\text{च})$

$$\Delta\text{र} = \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}+\text{च}) - \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$$

$$= \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}+\text{च}) - \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य})$$

$$+ \text{फ}(\text{य}+\text{च}) \times \text{फि}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \times \text{फि}(\text{य})$$

इसलिये $\frac{\Delta\text{र}}{\Delta\text{य}} = \left\{\text{फ}(\text{य}+\text{च})\right\}\left\{\frac{\text{फि}(\text{य}+\text{च}) - \text{फि}(\text{य})}{\text{च}}\right\}$

$$+ \left\{\text{फि}(\text{य})\right\}\left\{\frac{\text{फ}(\text{य}+\text{च}) - \text{फ}(\text{य})}{\text{च}}\right\}$$

पूर्व विधि से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{फ}(\text{य}) \times \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} + \text{फि}(\text{य}) \times \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$

इसी युक्ति से यदि $\text{र} = \text{ल} \times \text{व} \times \text{स}$ तो

$\text{र} = \text{श} \times \text{स}$ यहाँ $\text{श} = \text{ल} \times \text{व}$

इसलिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} \times \text{स} + \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \times \text{श}$

परन्तु $\frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \times \text{व} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \times \text{ल}$

$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \times \text{व}\cdot\text{स} + \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}} \times \text{ल}\cdot\text{स} + \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \times \text{ल}\cdot\text{व}$

इसी तरह यदि $\text{र} = \text{ल}\cdot\text{व}\cdot\text{श}\cdot\text{प}$

तो $\text{र} = \text{ह} \times \text{प}$ यहाँ $\text{ल}\cdot\text{व}\cdot\text{श} = \text{ह}$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}\cdot\text{प} + \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}}\cdot\text{ह}$

परन्तु $\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}=\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\times\text{व}\cdot\text{श}+\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}\times\text{ल}\cdot\text{श}+\frac{\text{ताश}}{\text{ताय}}\times\text{ल}\cdot\text{व}$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\times\text{व}\cdot\text{श}\cdot\text{प}+\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}\text{ल}\cdot\text{श}\cdot\text{प}$

$$+\frac{\text{ताश}}{\text{ताय}}\times\text{ल}\cdot\text{व}\cdot\text{प}+\frac{\text{ताप}}{\text{ताय}}\times\text{ल}\cdot\text{व}\cdot\text{श}$$

इसी रीति से और भी जानना तब सिद्ध हो जायगा कि एक एक फल के तात्कालिकसम्बन्ध को और और फलों से गुण कर योग करना तो सब फलों के घात से जो राशि होगा उसका तात्कालिक सम्बन्ध होता है।

चौथा सिद्धान्त।

$$\text{यदि } \text{र}=\frac{\text{व}}{\text{ल}} \text{ तो } \text{व}=\text{र}\times\text{ल}$$

तब तीसरे सिद्धान्त से $\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}=\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\text{ल}+\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\cdot\text{र}$

वा, $\text{ल}\times\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=-\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\cdot\text{र}+\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$, वा

$$\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}\cdot\text{ल}-\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\cdot\text{व}=\text{ल}^2\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

इस लिये $\dfrac{\frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}\cdot\text{ल}-\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\cdot\text{व}}{\text{ल}^2}=\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इससे यह सिद्ध होता है कि भाज्य के तात्कालिकसम्बन्ध को हर से गुणा कर उस में हर के तात्कालिकसम्बन्ध को भाज्य से गुणा कर घटा दो शेष में हर के वर्ग का भाग देने से उस लब्धितुल्य चलराशि का तात्कालिकसम्बध होता है।

१०। इस प्रकरण में विद्यार्थियों के अभ्यास के लिये चारो सिद्धान्त से उत्पन्न फल को लिखते हैं।

$\text{र}=\text{लि}\cdot\text{ल}$ $\qquad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{लि}\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$.

$र=ल+व$ $\qquad \frac{तार}{ताय}=\frac{ताल}{ताय}+\frac{ताव}{ताय}$

$र=ल-व$ $\qquad \frac{तार}{ताय}=\frac{ताल}{ताय}-\frac{ताव}{ताय}$

$र=ल\pm स्थि$ $\qquad \frac{तार}{ताय}=\frac{ताल}{ताय}$

$र=ल\times व$ $\qquad \frac{तार}{ताय}=\frac{ताल}{ताय}व+\frac{ताव}{ताय}ल$

$र=\frac{व}{ल}$ $\qquad \frac{तार}{ताय}=\left(\frac{ताव}{ताय}ल-\frac{ताल}{ताय}व\right)\div ल^2$

$र=\frac{व}{स्थि}$ $\qquad \frac{तार}{ताय}=\frac{ताव}{तायस्थि}$

इन के स्मरणार्थ श्लोक और दोहे बना कर लिख देते हैं।

श्लोक

तात्कालिकाख्यसम्बन्धःस्थिरघ्नविहृतो भवेत्।
चलराशेस्स सम्बन्धस्थिरघ्नविहृतस्य यै॥

दोहा।

स्थिरसंख्या से गुणित वा भाजित जो सम्बन्ध।
सो स्थिर से संगुणित वा भाजित चलसम्बन्ध॥

श्लोक।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धयोगो विद्वन् भवेत् सदा।
चलराशियुतेराशेस्सम्बन्धः किल संस्फुटः॥

दोहा।

चलराशीसम्बन्ध को योग करो तत्काल।
चलराशिन के योग को सो सम्बन्ध निकाल॥

श्लोक।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धविवरं भवति ध्रुवम्।
चलराशिवियोगस्य सम्बन्धश्चलयुक्तितः॥

दोहा।

चलराशीसम्बन्ध को अन्तर करो तुरन्त।
चलराशिन के विवर को सो सम्बन्ध नितान्त॥

श्लोक।

तात्कालिकाख्यसम्बन्धावन्योन्यचलसंहतौ।
तद्युतिश्चलघातस्य सम्बन्धो भवति ध्रुवम्॥

दोहा।

निज विहाय चल से गुणो निज सम्बन्ध निहार।
ताको युति चलघात को सो सम्बन्ध विचार॥

श्लोक।

लवसम्बन्धगुणितो हरो हीनो लवेन सः।
हरसम्बन्धनिघ्नेन हरवर्गहृतः फलम्॥
भिन्नस्य तस्य राशेस्स्यात् सम्बन्धस्सततं यतः।
छात्रैरेतत्सदा चिन्त्यं निजबुद्धिविवृद्धये॥

दोहा।

लवसम्बन्ध गुणा करो हर से देहु घटाय।
तामें हरसम्बन्ध अरु अंश घात हरताय॥
हर के वर्ग से भाग दो जो लब्धी मिल जाय।
भिन्नरूपचलराशि को सो सम्बन्ध कहाय॥

अभ्यासार्थ प्रश्न।

(१) $र = ८ य + ४$ इसका तात्कालिकसम्बन्ध कहो उ० $\frac{तार}{ताय} = ८$।

(२) $र = २ (य + ३) + ३ (य + ४)$ ... उ० $\frac{तार}{ताय} = ५$।

(३) $र = (७ य + ५) (५ य + २)$ ... उ० $\frac{तार}{ताय} = ७० य + ३९$।

(४) $र = \frac{५ य + ३}{१०}$ ... ... उ० $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{२}$।

(५) $र = \frac{११ य + ७}{१३ य + ११}$ ... ... उ० $\frac{तार}{ताय} = \frac{३०}{(१३ य + ११)^{२}}$।

उदाहरण ।

(१) एक पुरुष को पन्द्रह कोश जाना था उसने पहिले घण्टे में एक कोश दूसरे घण्टे में दो कोश तीसरे घण्टे में तीन कोश इस चाल से चला फिर तीसरे घण्टे के अन्त में उसका जो चलने का वेग था उसी वेग से चल कर मंजिल पूरा किया तो बतावो वह कितने घण्टे में वहाँ पहुँचा ? ।

उ० घं० $५\frac{५}{६}$ ।

(२) एक राजा की फौज दुश्मन को भगाने के लिए उसके किले पर चली जिसकी दूरी फौज से १११ कोश थी यह फौज पहिले दिन ३ कोश फिर प्रतिदिन दो दो कोश की वृद्धि से चली बाद नव रोज के लश्कर में खबर पहुँची कि दुश्मन किला छोड़ कर भागा इस लिये उस वक्त जो फौज के चलने का वेग था उसी वेग से उन लोगों ने दुश्मन का पीछा किया और छ रोज में दुश्मन के यहाँ पहुँच कर उसको गिरिफ्तार किया तो बताओ कि दुश्मन रोज कितना भागता था ? ।

उत्तर १८ कोश ।

इति प्रथमाध्याय ।

द्वितीयाध्याय २ ।

साधारणफलों के सम्बन्ध के विषय में ।

११ । इस प्रक्रम में अनेक फलों के सम्बन्ध की सुगम रीति दिखलाते हैं ।

प्रथम सिद्धान्त

यदि $र = य^{न}$ यहाँ न पूर्ण और धन संख्या है

तो $र' = (य + च)^{न} = य^{न} + न \cdot य^{न-१}च + \cdots\cdots + च^{न}$

$\therefore \Delta र = न \cdot य^{न-१}च + \cdots\cdots + च^{न}$

तब पूर्वोक्त युक्ति से $\frac{तार}{ताय} = न \cdot य^{न-१}$

इसी तरह यदि $र = य^{\frac{न}{म}}$

तो $र^म = य^न = ल$ फिर पूर्व युक्ति से

$$\frac{ताल}{ताय} = न \cdot य^{न-१}$$

परन्तु $\frac{ताल}{ताय} = \frac{तार}{ताय} म \cdot र^{म-१}$ इस हेतु $\frac{तार}{ताय} = \frac{न}{म} \times \frac{य^{न-१}}{र^{म-१}}$

या $\frac{तार}{ताय} = \frac{न}{म} \times \frac{य^{न-१} \times य^{\frac{न}{म}}}{र^म} = \frac{न}{म} \times \frac{य^{-१} \times य^{\frac{न}{म}}}{१} = \frac{न}{म} \times य^{\frac{न-म}{म}}$

इसी रीति से यदि $र = य^{-न} = \frac{१}{य^न}$

तब $र \cdot य^न = १$, पूर्व विधि से

$$\frac{तार}{ताय} \times य^न + र \cdot य^{न-१} \times न = ०$$

इसलिये $\frac{तार}{ताय} = -न \cdot \frac{य^{न-१}}{य^न} \times र = \frac{-न \cdot य^{न-१}}{य^{२न}} = -न य^{-(न+१)}$

इससे यह सिद्ध होता है कि घात की संख्या से उस राशि के एकोनघात को गुण देने से राशिघात का सम्बन्ध होता है।

द्वितीय सिद्धान्त।

यदि $र = अ^य$ तो $र = \{१ + (अ - १)\}^य$

परन्तु $\{१ + (अ - १)\}^य = १ + य(अ - १) + य\left(\frac{य-१}{२}\right)(अ - १)^२ + \ldots\ldots$

$$= १ + य \left\{(अ - १) - \left(\frac{अ - १}{२}\right)^२ + \ldots\right\} + \ldots$$

इसलिये $र = अ^य = १ + अ_१ य + अ_२ य^२ + अ_३ य^३ + \ldots\ldots\ldots$

एक श्रेढी ऐसी होगी

अब $अ^य = १ + अ_१ य + अ_२ य^२ + अ_३ य^३ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ $अ^प = १ + अ_१ प + अ_२ प^२ + अ_३ प^३ + \ldots\ldots\ldots\ldots$

दोनों को परस्पर गुण देने से और पूर्व युक्ति से

$अ^{प+य} = १ + अ_१(प + य) + अ_२(प + य)^२ + \ldots\ldots\ldots$

$$= १ + य\,(अ_१ + २अ_२ च + \ldots) + \ldots\ldots = अ^च \times अ^य$$

$$= अ^च\,(१ + अ_१ य + अ_२ य^२ + \ldots)$$

$\therefore$ सरूप समीकरण से, $अ_१ \cdot अ^च = अ_१ + २अ_२ \cdot च + ३अ_३ \cdot च^२ + \ldots$

$$= अ_१ + अ_१^२ \cdot च + अ_१ \cdot अ_२ \cdot च^२ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

इस लिये $अ_१^२ = २अ_२ \;\; \therefore अ_२ = \frac{अ_१^२}{२}$

$$अ_१ \cdot अ_२ = \frac{अ_१^३}{२} = ३अ_३ \quad \therefore अ_३ = \frac{अ_१^३}{२\cdot३}$$

इसी तरह आगे भी जानना सब

$$अ^य = १ + अ_१ य + \frac{अ_१^२}{२} \cdot य^२ + \frac{अ_१^३}{२\cdot३} \cdot य^३ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

यदि $अ^य = अ^{\frac{१}{अ_१}}$ तो $अ^{\frac{१}{अ_१}} = १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२\cdot३} + \frac{१}{२\cdot३\cdot४} + \cdots$

यदि $१ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{२\cdot३} + \frac{१}{२\cdot३\cdot४} + \ldots = इ$

तो $अ^{\frac{१}{अ_१}} = इ \;\therefore अ = इ^{अ_१}$

यहाँ $अ_१$ को इ के आधार में अ का लघुरिक्थ कहते हैं इसे यों लिखते हैं $ल_इ अ = अ_१$ अर्थात् लघुरिक्थ इ आधार में अ का $अ_१$ है यहाँ $अ_१ = (अ - १) - \frac{१}{२}(अ - १)^२ + \frac{१}{३}(अ - १)^३ - \ldots,$ इस लिये $र = अ^य = १ + (ल_इ अ)\;य + \frac{१}{२}(ल_इ अ)^२ \cdot य^२ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ यों भी लिख सकते हैं।

अब, $र = अ^य = १ + (ल_इ अ) य + \frac{१}{२}(ल_इ अ)^२ \cdot य^२ + \ldots\ldots\ldots$
इस लिये $र' = अ^{य+च} = अ^य\,\{१ + (ल_इ अ) च + \frac{१}{२}(ल_इ अ)^२ \cdot च^२ + \ldots\}$

$$\triangle र = \{(ल_इ अ)\,च + \frac{१}{२}(ल_इ अ)^२ \cdot च^२ + \ldots\ldots\ldots\ldots\}\,अ^य$$

$$\frac{तार}{ताय} = अ^य\,(ल_इ अ) = र \times ल_इ अ$$

इस से यह सिद्ध होता है कि इ आधार में अ का जो लघुरिक्थ हो उसे घलसंख्या से गुण देने से उस का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

इसी युक्ति से यदि $र = अ^{क\cdot य}$

तो $र = ग^{य}$ यहाँ $ग = अ^{क}$

$$\frac{तार}{ताय} = ग^{य} \times लृ_इ ग \qquad \text{परन्तु } लृ_इ ग = क \cdot लृ_इ अ$$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = क \cdot लृ_इ अ \cdot अ^{कय}$

तीसरा सिद्धान्त।

यदि $र = लृ_इ य$

तो $इ^{र} = य$ इस हेतु दूसरे सिद्धान्त से

$$\frac{ताय}{तार} = इ^{र} \cdot लृ_इ इ = इ^{र} \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में चलराशि से भाग दो तो लघुरिक्थ का तात्कालिकसम्बन्ध होता है यदि इ आधार में लघुरिक्थ हो तो।

चौथा सिद्धान्त।

यदि $र = ज्याय$

तो $र' = ज्या\,(य + च)$

और $\Delta र = ज्या\,(य + च) - ज्याय = \frac{२\,कोज्या\,(य + \frac{१}{२}च) \cdot ज्या\,\frac{१}{२}च}{त्रि}$

$$\frac{\Delta र}{\Delta य} = \frac{कोज्या\,(य + \frac{१}{२}च)\frac{ज्या\,\frac{१}{२}च}{\frac{१}{२}च}}{त्रि}$$

$\therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{कोज्याय}{त्रि}$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या में त्रिज्या का भाग दो तो जीवा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

इस तात्कालिकसम्बन्ध को भास्कराचार्य्य जी जानते थे अपने सिद्धान्तशिरोमणि के स्पष्टाधिकार में लिखा है परन्तु इसका जानना वैसा ही था जैसा क्रान्तिक्षेत्र का जानना।

पांचवां सिद्धान्त ।

यदि $र = कोज्याय$

तो $र^{1} = कोज्या\,(य + च)$

इस लिये $\triangle र = कोज्या\,(य + च) - कोज्याय = \frac{-२\,ज्या\,(य + \frac{१}{२}च)\,ज्या\,\frac{१}{२}च}{त्रि}$

$$\frac{\triangle र}{\triangle य} = \frac{-ज्या\,(य + \frac{१}{२}च)\,\frac{ज्या\,\frac{१}{२}च}{\frac{१}{२}च}}{त्रि} \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{-ज्याय}{त्रि}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि जीवा में त्रिज्या का भाग दो तो कोटिज्या का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

छठवां सिद्धान्त ।

यदि $र = स्पय = \frac{त्रि \cdot ज्याय}{कोज्याय}$ तो प्रथमाध्याय के चौथे सिद्धान्त से

$$\frac{तार}{ताय} = त्रि\left(\frac{कोज्या^{२}य + ज्या^{२}य}{त्रि \cdot कोज्या^{२}य}\right) = \frac{त्रि^{२} \times त्रि^{२}}{त्रि^{२} \cdot कोज्या^{२}य} = \frac{छे^{२}\,य}{त्रि^{२}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि छेदनरेखा के वर्ग में त्रिज्या के वर्ग का भाग देने से स्पर्शरेखा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

सातवाँ सिद्धान्त ।

यदि $र = कोस्पय = \frac{त्रि \cdot कोज्याय}{ज्याय}$ यहाँ भी प्रथमाध्याय के चौथे सिद्धान्त से

$$\frac{तार}{ताय} = त्रि\left(\frac{-ज्या^{२}य - कोज्या^{२}य}{त्रि \cdot ज्या^{२}य}\right) = \frac{-त्रि^{२}}{ज्या^{२}य} = -\frac{कोछे^{२}य}{त्रि^{२}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिच्छेदनरेखा के वर्ग में त्रिज्या-वर्ग का भाग देने से कोटिस्पर्शरेखा का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

आठवाँ सिद्धान्त ।

यदि $र = छेय = \frac{त्रि^{२}}{कोज्याय}$ यहाँ भी पूर्वोक्त युक्ति से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{त्रि}^{2}\left(\frac{+\text{ज्याय}}{\text{त्रि}\cdot\text{कोज्या}^{2}\text{य}}\right) = \frac{\text{त्रि}\cdot\text{ज्याय}}{\text{कोज्याय}\times\text{कोज्याय}} = \frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि स्पर्शरेखा में कोटिज्या का भाग देने से छेदनरेखा का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

नवाँ सिद्धान्त।

यदि $\text{र} = \text{कोछेय} = \frac{\text{त्रि}^{2}}{\text{ज्याय}}$ यहाँ भी उसी युक्ति से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{त्रि}^{2}\left(\frac{-\text{कोज्याय}}{\text{त्रि}\cdot\text{ज्या}^{2}\text{य}}\right) = \frac{-\text{त्रि}\cdot\text{कोज्याय}}{\text{ज्याय}\cdot\text{ज्याय}} = \frac{-\text{कोस्पय}}{\text{ज्याय}}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिस्पर्शरेखा में जीवा का भाग देने से कोटिच्छेदन का ऋणात्मक तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

दशवाँ सिद्धान्त।

यदि $\text{र} = \text{उय} = \text{त्रि} - \text{कोज्याय}$, यहाँ प्रथमाध्याय के तीसरे सिद्धान्त से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ज्याय}}{\text{त्रि}}$ इसी चाल से

यदि $\text{र} = \text{कोउय} = \text{त्रि} - \text{ज्याय}$

तो $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-\text{कोज्याय}}{\text{त्रि}}$

इससे यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या का जो ऋणात्मकसम्बन्ध वही धनात्मकसम्बन्ध उत्क्रमज्या का होता है और जीवा का जो धनात्मकसम्बन्ध वही ऋणात्मकसम्बन्ध कोटि के उत्क्रमज्या का होता है।

१२। इस प्रकम में पूर्व सिद्धान्तों से उत्पन्न सम्बन्धों को विद्यार्थियों के अभ्यासार्थ एकट्ठा करके लिखते हैं।

(१) $\text{र} = \text{य}^{\text{न}}$ $\quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{न}\cdot\text{य}^{\text{न}-1}$

(२) $\text{र} = \text{अ}^{\text{य}}$ $\quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ}^{\text{य}}\cdot\text{ल}_{\text{र}}\text{अ}$

(३) $\text{र} = \text{अ}^{\text{कय}}$ $\quad \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ}^{\text{कय}}\cdot\text{क}\cdot\text{ल}_{\text{र}}\text{अ}$

(४) र=ल्य $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{य}}$

(५) र=ज्याय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय}$

(६) र=कोज्याय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{ज्याय}$

(७) र=स्पय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{छे}^{२}\text{य}$

(८) र=कोस्पय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{कोछे}^{२}\text{य}$

(९) र=छेय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}}$

(१०) र=कोछेय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{-\text{कोस्पय}}{\text{ज्याय}}$

(११) र=उय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{ज्याय}$

(१२) र=कोउय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{कोज्याय}$

यहाँ लाघवार्थ सर्वत्र रूप अर्थात् १ त्रिज्या मान के तात्कालिक-सम्बन्धों को लिखा है।

विद्यार्थियों को अच्छी तरह याद करने के लिये इन के श्लोक और दोहे लिखते हैं।

श्लोक।

राशिरूपोनघातघ्नो घाताङ्को भववीह सः।
यस्तात्कालिकसम्बन्धो राशिघातस्य सर्वदा ॥

दोहा।

राशिघातघाताङ्क को गुणन राशि सों भाग।
राशिघातसम्बन्ध सो है है सदा अदाग ॥

श्लोक।

इ-संज्ञाधारजातं यच्चघुरित्थं स्थिरस्य वै।
निजाधारस्य राशिघ्नं राशिसम्बन्धसंमितिः ॥

दोहा ।

ई-संज्ञक आधार में लघूरिक्थ को जान ।
निज अधार को राशि से गुणि सम्बन्ध प्रमान ॥

श्लोक ।

इ-संज्ञाधारजातेन भक्तं रूपं फलं भवेत् ।
लघुरिक्थजसम्बन्धो लघुरिक्थोत्थराशिना ॥

दोहा ।

एक अंश लघुरिक्थभवराशिछेद तें भिन्न ।
लघूरिक्थसम्बन्ध सो जानहु मित्र अखिन्न ॥

श्लोक ।

कोटिज्या तु भुजज्यायाः कोटिज्याया ऋणो गुणः ।
गणकेन सदा ज्ञेयः सम्बन्धः क्रमशः खलु ॥

दोहा ।

भुजजीवा को कोटिगुण होत सदा सम्बन्ध ।
अरु ऋणजीवा होत है कोटिज्यासम्बन्ध ॥

श्लोक ।

छेदनस्य स्फुटिर्ज्ञेयस्स्पर्शसम्बन्ध एव वै ।
कोटिच्छेदनवर्गश्च कोटिस्पर्शभवोऽधनः ॥

दोहा ।

छेदन को जो वर्ग हो सो स्पर्शजसम्बन्ध ।
कोटिच्छेदन वर्ग ऋण कोटिस्पर्शसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

स्पर्शः कोटिज्यया भक्तसम्बन्धश्छेदनस्य सः ।
कोटिच्छेदनजः कोटिस्पर्शो मौर्व्याहृतोऽधनः ॥

दोहा ।

कोटिज्याहृत स्पर्श जो सो छेदनसम्बन्ध ।
कोटिस्पर्श जीवाविहृत छेदनकोटिसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

भुजज्योत्क्रमजीवाया ऋणकोटिज्यका तथा ।
कोट्युत्क्रमगुणस्य स्यात्सम्बन्धस्सततं स्फुटः ॥

दोहा।

भुजजीवा को जाननो उत्क्रमगुणसम्बन्ध।
कोट्युत्क्रम को कोटिगुण ऋण यह सीखु प्रबन्ध॥

अभ्यासार्थ प्रश्न।

(१) $र=\frac{४ य^{न}+५}{३}$ इसका तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$उ० \frac{४}{३} न \cdot य^{न-१}=\frac{तार}{ताय}।$$

(२) $र=\frac{७ य^{७}+५ य^{५}+३ य^{३}+य+१५}{८}$ इसका तात्कालिक-सम्बन्ध क्या है ? $उ० \frac{४९ य^{६}+२५ य^{४}+९ य^{२}+१}{८}=\frac{तार}{ताय}।$

(३) $र=\frac{७य^{२}+११}{५य^{७}+९}$ ... $उ० \frac{य^{१}(७०य^{६}+९६७य^{२}-३८५)}{(५ य^{७}+९)^{२}}=\frac{तार}{ताय}।$

(४) $र=इ^{इय}$ .... $उ० इ^{इ\cdot य}\times इ=\frac{तार}{ताय}।$

(५) $र=ल_{अ}य$ .... $उ० \frac{१}{य\cdot ल_{इ}अ}=\frac{तार}{ताय}।$

(६) $र=इ^{८य}$ .... $उ० ८\cdot इ^{८य}=\frac{तार}{ताय}।$

(७) $र=\frac{इ^{७य}+१}{य+१}$ ...... $उ० \frac{इ^{७य}(७य+६)-१}{(य+१)^{२}}=\frac{तार}{ताय}।$

(८) $र=४ल_{इ}य$ .... $उ० \frac{४}{य}=\frac{तार}{ताय}।$

(९) $र=\frac{ल_{इ}य}{य-२}$ .... $उ० \frac{१}{य(य-२)}-\frac{ल_{इ}य}{(य-२)^{२}}=\frac{तार}{ताय}।$

(१०) $र=\frac{ल_{इ}य}{इ^{य}}$ .... $उ० \frac{१}{य\cdot इ^{य}}-\frac{ल_{इ}य}{इ^{य}}=\frac{तार}{ताय}।$

उदाहरण।

(१) एक आदमी के पास १०) था उसने इसे व्यापार में लगा

कर प्रथम वर्ष के अन्त में १२१) किया फिर दूसरे वर्ष के अन्त में १४४) इतना किया यों प्रतिवर्ष में वर्ष संख्यायुत मूलधन के वर्गतुल्य वृद्धि होती थी। यदि चौथे वर्ष के अन्त में उस के धन के बढ़ने का जो वेग था उसी वेग से पाँचवें वर्ष में वृद्धि होती तो पूर्व नियमानुसार उसको कितना घाटा पड़ता ?। उत्तर १ रुपया।

(२) एक पुरुष को वर्ष दिन में पहिले १०) रुपया मिला फिर दूसरे वर्ष के अन्त में १०० तीसरे वर्ष के अन्त में १००० मिला तो बताओ यदि तीसरे वर्ष के अन्त में जो तनख्वाह बढ़ने का वेग था उसी वेग से चौथे वर्ष में तनख्वाह होती तो कितना पाता ?।

उत्तर २९२२.५ ।

इति द्वितीयाध्याय ।

तृतीयाध्याय ३ ।

त्रिकोणमितिफलों के उलटे सम्बन्ध के विषय में ।

१३ । प्रथम सिद्धान्त ।

यदि $र = ज्या^{-1} य$

तो ज्यार = य इस लिये दूसरे अध्याय के चौथे सिद्धान्त से,

$$कोज्यार = \frac{ताय}{तार} \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{कोज्यार} = \frac{१}{\sqrt{१-य^२}} ।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में कोटिज्या का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

द्वितीय सिद्धान्त ।

यदि $र = कोज्या^{-1} य$ यहाँ भी उसी युक्ति से

$$कोज्यार = य \therefore -ज्यार = \frac{ताय}{तार}$$

$$इस हेतु \frac{तार}{ताय} = -\frac{१}{ज्यार} = -\frac{१}{\sqrt{१-य^२}} ।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में ऋणजीवा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

तीसरा सिद्धान्त ।

यदि $\text{र}=\text{स्प}^{-१}\text{य}$

तो $\text{स्पर}=\text{य}$ फिर पूर्व युक्ति से

$$\text{छे}^{२}\text{र}=\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\;\therefore\;\frac{१}{\text{छे}^{२}\text{र}}=\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

वा, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{१}{१+\text{य}^{२}}$,

इसी तरह यदि $\text{र}=\text{कोस्प}^{-१}\text{य}$

तो $\text{कोस्पर}=\text{य}$ यहाँ भी पूर्वोक्त विधि से

$$-\text{कोछे}^{२}\text{र}=\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\;\therefore\;\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{-१}{\text{कोछे}^{२}\text{र}}=\frac{-१}{१+\text{य}^{२}}\text{ ।}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में छेदनरेखा के वर्ग का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा रूप में कोटिच्छेदनरेखा के वर्ग का भाग देने से ऋणात्मक चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है ।

चौथा सिद्धान्त ।

यदि $\text{र}=\text{छे}^{-१}\text{य}$ तो $\text{छेर}=\text{य}$

यहाँ दूसरे अध्याय से

$$\frac{\text{स्पर}}{\text{कोज्यार}}=\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\;\therefore\;\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{कोज्यार}}{\text{स्पर}}$$

परन्तु $\text{कोज्यार}=\frac{१}{\text{य}}$ और $\text{स्पर}=\sqrt{\text{य}^{२}-१}$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{१}{\text{य}\sqrt{\text{य}^{२}-१}}$

इसी युक्ति से, यदि $\text{र}=\text{कोछे}^{-१}\text{य}$

तो $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{-१}{\text{य}\sqrt{\text{य}^{२}-१}}$

इस से यह सिद्ध होता है कि कोटिज्या में स्पर्शरेखा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा जीवा में कोटिस्पर्श का भाग देने से जो लब्ध हो उसे ऋण करने से चाप का तात्कालिक-सम्बन्ध होता है।

पाँचवाँ सिद्धान्त ।

यदि $र = छे^{-1} य$ तो $छेर = य$

यहाँ भो पूर्वोक्त रीति से

$$ज्यार = \frac{ताय}{तार} \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{ज्यार}$$

$$या\ \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{\sqrt{१-(१-य)^२}} = \frac{१}{\sqrt{२य-य^२}}\ ।$$

इसी युक्ति से यदि $र = कोछे^{-1} य$

$$तो\ \frac{तार}{ताय} = \frac{-१}{कोज्यार} = \frac{-१}{\sqrt{२य-य^२}}\ ।$$

इस से यह सिद्ध होता है कि रूप में जीवा का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है वा रूप में ऋण कोटिज्या का भाग देने से चाप का तात्कालिकसम्बन्ध होता है।

१४ । पूर्व सिद्धान्तों से उत्पन्न सम्बन्ध को स्मरणार्थ एकट्ठा लिखते हैं।

(१) $र = ज्या^{-1} य \qquad \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{\sqrt{१-य^२}}$ ।

(२) $र = कोज्या^{-1} य \qquad \frac{तार}{ताय} = -\frac{१}{\sqrt{१-य^२}}$ ।

(३) $र = स्प^{-1} य \qquad \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{१+य^२}$ ।

(४) $र = कोस्प^{-1} य \qquad \frac{तार}{ताय} = -\frac{१}{१+य^२}$ ।

(५) $र = छे^{-1} य \qquad \frac{तार}{ताय} = \frac{१}{य\sqrt{य^२-१}}$ ।

(६) $र = कोछे^{-1} य$ $\frac{तार}{ताय} = -\frac{१}{य\sqrt{य^{२} - १}}$ ।

(७) $र = उ^{-1} य$ $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{\sqrt{२य - य^{२}}}$ ।

(८) $र = कोउ^{-1} य$ $\frac{तार}{ताय} = -\frac{१}{\sqrt{२य - य^{२}}}$ ।

इन के श्लोक और दोहे विद्यार्थियों के अभ्यासार्थ लिखते हैं ।

श्लोक ।

जीवया कोटिमौर्व्या च पृथक् चन्द्रो विभाजितः ।
आद्योऽधनात्मकः कार्य्यसम्बन्धो चापजो ततः ॥

दोहा ।

जीवाहृत जो रूप हो ऋण कार्मुकसम्बन्ध ।
कोटिज्याहृत रूप वा सो कार्मुकसम्बन्ध ॥

श्लोक ।

"रूपी छेदनकोटिच्छेदनकृत्या हृतावन्यः ।
अधनस्तदा भवेतां चापभवौ तत्र सम्बन्धौ ॥

दोहा ।

छेदनकृतिहृत रूप हो सोई चापसम्बन्ध ।
ऋणकोटिच्छेदकृतिहृत एक होत सम्बन्ध ॥

श्लोक ।

कोटिज्या स्पर्शभक्ता या कोटिस्पर्शाहृतो गुणः ।
ऋणस्तदा भवेतां तौ सम्बन्धौ चापजौ सदा ॥

दोहा ।

स्पर्शविहृत गुण कोटि को सो है धनुसम्बन्ध ।
कोटिस्पर्श विभक्त या ऋणजीवा सम्बन्ध ॥

१५ । इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को उदाहरण के उत्तर करने की युक्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरणों का उत्तर निकाल कर के लिखते हैं ।

(१) जब कि $\text{र}=\text{स्प}\,(\text{क}\cdot\text{य})$ यहाँ $\text{क}\cdot\text{य}=\text{ल}$

तब $\text{र}=\text{स्पल}$ अब द्वितीयाध्याय के छठवें सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}=\text{छे}^{2}\text{ल} \text{ ।}$$

और $\dfrac{\text{ताल}}{\text{ताय}}=\text{क}$, दोनों को परस्पर गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{क}\cdot\text{छे}^{2}\text{कय}$$ यही उत्तर हुआ।

(२) $\text{र}=\text{स्प}^{-1}\text{कय}$ यहाँ भी $\text{कय}=\text{ल}$

तब $\text{र}=\text{स्प}^{-1}\text{ल}$ इस अध्याय के तीसरे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}=\frac{१}{१+\text{ल}^{2}} \text{ परन्तु } \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}=\text{क}$$

इस लिये $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{\text{क}}{१+\text{ल}^{2}}=\dfrac{\text{क}}{१+\text{क}^{2}\cdot\text{य}^{2}}$ यही उत्तर हुआ।

(३) $\text{र}=\text{स्प}\,(\text{ल}_{\text{य}})$ जब कोई आधार न हो वहाँ इ आधार समझो।

यहाँ मानो कि $\text{ल}_{\text{य}}=\text{ल}$

तब $\text{र}=\text{स्पल}$ पूर्व युक्ति से $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताल}}=\text{छे}^{2}\text{ल}$ परन्तु $\text{ल}=\text{ल}_{\text{इ}}\text{य}$

इस लिये $\dfrac{\text{ताल}}{\text{ताय}}=\dfrac{१}{\text{य}}$ इस से ऊपर वालों को गुण देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{छे}^{2}\text{ल}}{\text{य}}=\frac{\text{छे}^{2}\,(\text{ल}_{\text{इ}}\text{य})}{\text{य}}$$ यही उत्तर है।

(४) $\text{र}=\text{ल}_{\text{इ}}\,(\text{स्पय})$ यहाँ $\text{स्पय}=\text{ल}$

तब $\text{र}=\text{ल}_{\text{ल}}$ फिर पूर्व युक्ति से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}=\frac{१}{\text{ल}} \text{ परन्तु } \text{स्पय}=\text{ल}$$

इस लिये $\dfrac{\text{ताल}}{\text{ताय}}=\text{छे}^{2}\text{य}$ इस से ऊपर के पक्षों को गुण देने से

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{छे}^2\text{य}}{\text{स्पय}}$ यही उत्तर हुआ ।

(५) र=ज्याय • कोस्प$^{-1}$य • इ$^{\text{य}}$ यहाँ प्रथमाध्याय के तीसरे सिद्धान्त से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{कोज्याय}\cdot\text{कोस्प}^{-1}\text{य}\cdot\text{इ}^{\text{य}}$$

$$+ \text{ज्याय}.\ \text{इ}^{\text{य}} \times \frac{-1}{1+\text{य}^2} + \text{ज्याय}.\ \text{कोस्प}^{-1}\text{य}.\ \text{इ}^{\text{य}}$$

वा $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{इ}^{\text{य}}.\ \text{कोस्प}^{-1}\text{य}\ (\text{कोज्याय} + \text{ज्याय}) - \frac{\text{ज्याय}.\ \text{इ}^{\text{य}}}{1+\text{य}^2}$

यही उत्तर हुआ ।

यों विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरण का उत्तर करें ॥

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) क$\sqrt[3]{\text{य}}$ = र इस का तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ? ।

उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\text{य}^2}}\right)$ ।

(२) ग $(\sqrt{\text{य}} + \sqrt[3]{\text{य}})$=र, उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{ग}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\text{य}}} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\text{य}^2}}\right)$ ।

(३) क (ज्याय + कोज्याय)=र, उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ (कोज्याय − ज्याय) क ।

(४) क (छेय + स्पय)=र, उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{क}\ (\text{ज्याय} + 1)}{\text{कोज्या}^2\text{य}}$ ।

(५) (छेय + कोछेय) क=र उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क}\left(\frac{\text{स्पय}}{\text{कोज्याय}} - \frac{\text{कोस्पय}}{\text{ज्याय}}\right)$ ।

(६) क (ज्या^{2}य + कोज्या^{2}य)=र .... उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$ ।

(७) $\frac{1}{\text{क}}$ (स्पय × कोस्पय + ५)=र .... उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$ ।

(८) ग (छे^{2}य − स्प^{2}य)=र .... उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0$ ।

(९) $\text{घ}\,(\text{स्पय}\cdot\text{कोस्पय}+\text{छे}^{२}\text{य}-\text{स्प}^{२}\text{य})=\text{र}\ldots\text{उ०}\ \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=०$ ।

(१०) $\text{घ}\cdot\text{ज्या}\left(\dfrac{\text{य}^{२}+३}{३\text{य}+१}\right)=\text{र},$

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{घ}\cdot\left(\frac{३\,\text{य}^{२}+२\,\text{य}-९}{९\,\text{य}^{२}+६\,\text{य}+१}\right)\text{कोज्या}\left(\frac{\text{य}^{२}+३}{३\,\text{य}+१}\right)\text{ ।}$$

(११) $\text{क}\cdot\text{कोज्या}\left(\dfrac{\text{य}+५}{\text{य}+७}\right)=\text{र},$

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=-\text{क}\cdot\frac{२}{(\text{य}+७)^{२}}\times\text{ज्या}\left(\frac{\text{य}+५}{\text{य}+७}\right)\text{ ।}$$

(१२) $\text{क}\cdot\text{स्प}\left(\dfrac{\text{य}+४}{५}\right)=\text{र},\ \text{उ०}\ \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{क}\cdot\tfrac{१}{५}\text{छे}^{२}\left(\dfrac{\text{य}+४}{५}\right)$ ।

(१३) $\text{क}\cdot\text{कोस्प}\left(\dfrac{\text{य}+३}{२}\right)=\text{र},\text{उ०}\ \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=-\tfrac{१}{२}\text{क}\cdot\text{कोछे}^{२}\left(\dfrac{\text{य}+३}{२}\right)$ ।

(१४) $\text{क}\cdot\text{स्प}^{-१}(\text{य}+७)=\text{र},\ \text{उ०}\ \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{\text{क}}{\text{य}^{२}+१४\,\text{य}+५०}$ ।

(१५) $\text{कोज्या}^{-१}\left(\dfrac{\text{य}^{२}+१}{५}\right)=\text{र},\ \text{उ०}\ \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{-२\,\text{य}}{\sqrt{२४-२\,\text{य}^{२}-\text{य}^{४}}}$ ।

(१६) $\text{स्प}^{-१}\ (\text{य}^{3}+५)=\text{र},\ \text{उ०}\ \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{३\,\text{य}^{2}}{\text{य}^{६}+१०\,\text{य}^{3}+२६}$ ।

(१७) $\text{छे}\left(\dfrac{\text{य}^{3}+४}{\text{य}^{२}+३}\right)=\text{र},\text{उ०}\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{(\text{य}^{४}+९\text{य}^{२}-८\text{य})\,\text{स्प}\left(\dfrac{\text{य}^{3}+४}{\text{य}^{२}+३}\right)}{(\text{य}^{४}+६\text{य}^{२}+९)\ \text{कोज्या}\left(\dfrac{\text{य}^{3}+४}{\text{य}^{२}+३}\right)}$ ।

(१८) $\text{कोछे}\left(\dfrac{३\,\text{य}+२}{५\,\text{य}+७}\right)=\text{र},\text{उ०}\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\dfrac{-११\,\text{कोस्प}\ \left(\dfrac{३\,\text{य}+२}{५\,\text{य}+७}\right)}{(५\text{य}+७)^{२}\,\text{ज्या}\ \left(\dfrac{३\,\text{य}+२}{५\,\text{य}+७}\right)}$ ।

(१९) $\text{छे}^{-१}\left(\dfrac{\text{य}^{२}+\text{य}-२}{\text{य}-३}\right)=\text{र},$

$$\text{उ०}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{य}^{२}-६\,\text{य}-१}{(\text{य}^{२}+\text{य}-२)\sqrt{\text{य}^{४}+६\text{य}^{3}-४\text{य}^{२}+२\,\text{य}-५}}\text{ ।}$$

(२०) $कोछे^{-1}\left(\frac{२य^2+य}{२य+५}\right)=र,$

$$उ०\ \frac{तार}{ताय}=-\frac{६य^2+२०य+५}{(२य^2+य)\sqrt{४य^4+४य^3-८य^2-२०य-२५}}\ ।$$

(२१) $उज्या\left(य^2+\frac{३}{७}\right)=र,\qquad उ०\frac{तार}{ताय}=२य\cdot ज्या\left(य^2+\frac{३}{७}\right)\ ।$

(२२) $कोउज्या\left(य^3+\frac{३}{५}\right)=र,\ उ०\frac{तार}{ताय}=-३य^2\cdot कोज्या\left(य^3+\frac{३}{५}\right)$

(२३) $उ^{-1}ज्या\left(\frac{१}{य+२}\right)=र, उ०\frac{तार}{ताय}=-\frac{-१}{(य+२)\sqrt{२य+३}}\ ।$

(२४) $कोउ^{-1}ज्या\left(\frac{य+१}{य+२}\right)=र,$

$$उ०\frac{तार}{ताय}=-\frac{१}{(य+२)\sqrt{य^2+४य+३}}\ ।$$

(२५) $\left(\frac{य+२}{४}\right)^४=र,\ उ०\frac{तार}{ताय}=\left(\frac{य+२}{४}\right)^३\ ।$

(२६) $(य+२)^3(य^2+३)^४=र,$

$उ०\frac{तार}{ताय}=\{(य^2+३)^४(य+२)^2\}\{९+२०य+१३य^2\}\ ।$

(२७) $\sqrt{२य+७}=र\cdots\cdots उ०\frac{तार}{ताय}=\frac{१}{\sqrt{२य+७}}\ ।$

(२८) $\left(\frac{य+३}{य-१}\right)^{\frac{५}{३}}=र,\cdots\cdots\ उ०\ \frac{तार}{ताय}=\frac{-\frac{२०}{३}\cdot\left(\frac{य+३}{य-१}\right)^{-\frac{२}{३}}}{(य-१)^2}\ ।$

(२९) $२(य+२)+३(य^3+५)=र,\ उ०\frac{तार}{ताय}=९य^2+२\ ।$

(३०) $\frac{८}{य+५}+\frac{९}{य+६}-\frac{११}{य^2+११य+३०}=र,$

$$उ०\ \frac{तार}{ताय}=-\frac{१७य^2+१६४य+३९२}{(य^2+११य+३०)^2}\ ।$$

(३१) $अ^{अय} + य = र$... उ० $\frac{तार}{ताय} = लु_{इ}अ \cdot अ \cdot अ^{अय} + १$ ।

(३२) $अ \cdot य \times अ^{अय} = र$ उ० $\frac{तार}{ताय} = अ \cdot अ^{अय}(य \cdot लु_{इ}अ \cdot अ + १)$ ।

(३३) $\frac{अ^{\frac{१}{य}}}{य} = र$ .... उ० $\frac{तार}{ताय} = -\frac{र}{य^{२}}(क + य)$ ।

यहाँ $क = लु_{इ}अ$ ।

(३४) $\frac{अ^{कय}}{कय} = र$, उ० $\frac{तार}{ताय} = \frac{अ^{कय}}{क \cdot य^{२}}(लु_{इ}अ \cdot य \cdot क - १)$ ।

(३५) $लु_{इ}(य^{२} + ११) = र$, उ० $\frac{तार}{ताय} = \frac{२य}{य^{२} + ११}$ ।

(३६) $\frac{अय}{अ^{अय}} = र$, उ० $\frac{तार}{ताय} = \frac{अ(१ - य \cdot अ \cdot लु_{इ}अ)}{अ^{अय}}$ ।

(३७) $\frac{स्पअय}{अस्पअय} = र$,

उ० $\frac{तार}{ताय} = \frac{र \cdot अ \cdot छे^{२}अय\,(१ - स्पअय\; लु_{इ}अ)}{स्पअय}$ ।

(३८) $कोज्याय \cdot य^{ज्याय} = र$,

उ० $\frac{तार}{ताय} = य^{ज्याय}\left(\frac{ज्या^{२}य}{२य} + कोज्या^{२}य \cdot लु_{इ}य - ज्याय\right)$ ।

(३९) $\left(\frac{य}{ज्याय}\right)^{\frac{य}{ज्याय}} = र$,

उ० $\frac{तार}{ताय} = र \cdot \frac{ज्याय - य \cdot कोज्याय}{ज्या^{२}य}\left\{लु_{इ}\left(\frac{य}{ज्याय}\right) + १\right\}$ ।

(४०) $(य + ज्याय)^{य + ज्याय} = र$,

उ० $\frac{तार}{ताय} = \{र + र \cdot कोज्याय\}\{लु_{इ}(य + ज्याय) + १\}$

(४१) $\left\{स्प\,(लु_{इ}य)\right\}^{लु_{इ}य} = र$,

उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{र}}{\text{य}}\left[\text{ल}_{\text{ई}}\{\text{स्प}(\text{ल}_{\text{ई}}\text{य})\} + \frac{\text{छे}^{२}(\text{ल}_{\text{ई}}\text{य}) \times \text{ल}_{\text{ई}}\text{य}}{\text{स्प}(\text{ल}_{\text{ई}}\text{य})}\right]$ ।

(४२) $(\text{ल}_{\text{ई}}\text{य})^{\text{ल}_{\text{ई}}\text{ल}_{\text{ई}}\text{य}} = \text{र}$, उ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = २\text{र}\left\{\frac{\text{ल}_{\text{ई}}(\text{ल}_{\text{ई}}\text{य})}{\text{य}\cdot\text{ल}_{\text{ई}}\text{य}}\right\}$ ।

(४३) यदि ज्याय + कोज्याय $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ कोज्या $\left(\frac{\pi}{४} - \text{य}\right)$ तो सिद्ध करो कि कोज्याय − ज्याय $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ ज्या $\left(\frac{\pi}{४} - \text{य}\right)$ ।

(४४) यदि ज्याय + ज्या२य + ज्या३य + ... + ज्या२४य

$$= \frac{\text{ज्या}\frac{२५}{२}\text{य}\cdot\text{ज्या}१२\text{य}}{\text{ज्या}\frac{\text{य}}{२}}$$ तो सिद्ध करो कि

कोज्याय + २कोज्या२य + ३कोज्या३य + ... + २४कोज्या२४य

= १२, यदि २४य = २π ।

उदाहरण ।

(१) ज्यामंफ = ज्यामंके·ज्याअंफ जब ऐसा समीकरण ग्रह के मन्दफलज्या का है तो बताओ इष्टकेन्द्रगति में तात्कालिक वेग से मन्दफल की क्या गति होगी ? । उ० $\frac{\text{मंफग}}{\text{केग}} = \frac{\text{कोज्यामंके}\cdot\text{ज्याअफ}}{\text{कोज्यामफ}}$ ।

(२) मंफ = ज्यामके·ज्याअंफ यदि ऐसा समीकरण ग्रह के मन्दफल का हो तो एकरूपवेग से मंदफल की गति बताओ ? ।

उ० $\frac{\text{मंफग}}{\text{केग}}$ = कोज्याके·ज्याअफं ।

(३) ज्यामंफ = ज्यामंके·के·ज्याअंफ यदि इस समीकरण से ग्रह की मन्दफलज्या आवे तो इष्टकेन्द्रगति में फल की गति बताओ ? ।

उ० $\frac{\text{मंफग}}{\text{केग}} = \frac{\text{ज्याअंफ}}{\text{कोज्यामंफ}}$ (ज्यामंके + कोज्यामंके·के) ।

(४) $ज्यास्पके=\frac{ज्यामके}{क}$ यह ग्रह के स्पष्टशीघ्रकेन्द्रज्या के लिये समीकरण है इस पर से स्पष्टशीघ्रकेन्द्रगति बताओ ?।

$$उ० \frac{स्पकेग}{मकेग}=\frac{कोज्याफ}{फ}।$$

(इन चारो उदाहरणों के लिये भास्कराचार्य के गणिताध्याय का स्पष्टाधिकार देखो)।

(५) $ज्यामको=\frac{द्यु\cdotज्याल}{ज्यादि}$ इसमें यदि केवल "दि" चलराशि हो तो "ज्यामको" इसकी गति बताओ ?।

$$उ० \frac{ताम्रको}{तादि}=\frac{-कोज्यादि\cdotद्यु\cdotज्याल}{कोज्यामको\cdotज्या^{२}दि}।$$

(६) एक कीट की पहिले घंटे में एक अङ्गुल दूसरे घंटे के अन्त्य में १६ अङ्गुल, तीसरे घंटे के अन्त्य में $३^{२०}$ अङ्गुल, व घंटे के अन्त्य में $व^{\frac{व}{३}}$ अङ्गुल, गति थी। बताओ पाँचवें घंटे के अन्त्य में जो गति का वेग था उसी वेग से यदि छठवें घंटे में चलता तो कितना चलता ?।

$$उ० ५^{३।३०}(\frac{१}{६}+ल_{इ}५+ल^{२}_{इ}५)।$$

(७) दो कीट एक कुलाल के चक्र के परिधि पर पैठ के साथ ही परिधि पर चलना आरम्भ किये, पहला जितना चाप चलता था उस के जीवातुल्यचाप की जो कोटिज्या हो उतना चाप दूसरा चलता तो बताओ पहले की गति से दूसरे की गति के गुणित अधिक है ?।

$$उ० -\frac{ज्या(ज्याप)}{(कोज्याप)^{-1}}।$$

(८) पृथ्वी की प्रदक्षिणा करने के लिये दो पुरुष साथ ही चले पहला गर्भाधशाव से जितना कोणसम्बन्धि अंश चलता है उस के कोटाग्रुप जितने अंश की स्पर्शरेखा हो उतना दूसरा चलता है तो

दोनों में तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ? । उ० $\frac{\text{कोज्याय}}{\text{ज्या}^{2}\text{य}+१}$ ।

(यहां पहले का कोणांशसम्बन्धि चाप = य)

(९) वह कौन सा चाप है जिसकी गति से स्पर्शरेखा की गति चौगुनी होती है ? । उ० $=६०^{\circ}$ ।

(१०) एक वृत्तान्तर्गत समत्रिबाहु और समचतुर्भुज है कल्पना करो कि वृत्त का व्यासार्द्ध दूना हो गया तो तात्कालिकवेग से समत्रिबाहु के फल के चाल से चतुर्भुज के फल की गति के गुणित अधिक होगी ? ।

उ० $\frac{८}{३\sqrt{३}}$ ।

इति तृतीयाध्याय ।

चतुर्थाध्याय ४ ।

गतिपराम्परा के विषय में ।

१६ । पूर्व अध्यायों से स्पष्ट जान पड़ता है कि तात्कालिकसम्बन्ध भी एक प्रकार का चलराशि का फल है इस लिये यदि इस नये फल का तात्कालिकसम्बन्ध निकालना हो तो पूर्व प्रक्रमों से सहज में निकल सकता है ।

जैसे यदि, फ (य) = र = स्पय तो, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{१}{\text{कोज्या}^{2}\text{य}}$

अब यदि $\frac{१}{\text{कोज्या}^{2}\text{य}}$ = फि (य) = ल तो $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$

$= २ \cdot \text{ज्याय} \cdot \text{कोज्या}^{-3}\text{य}$

वा, $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\text{ताय}} = २\ \text{ज्याय}\cdot\text{कोज्या}^{-3}\text{य}$ इसी प्रकार अब इसे "य" का नया फल कल्पना कर इस का भी तात्कालिकसम्बन्ध निकाल सकते हो ।

$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ इसे पहला तात्कालिकसम्बन्ध कहते हैं, और $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\text{ताय}}$ इसे दूसरा तात्कालिकसम्बन्ध कहते हैं।

यदि य का तात्कालिकवेग (ताय) प्रत्येक य के फलों के तात्कालिकसम्बन्धों में एक ही कल्पना करें अर्थात् स्थिर कल्पना करें तो दूसरे तात्कालिकसम्बन्ध अर्थात् $\frac{\text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)}{\text{ताय}}$ इसे $\frac{\text{ता}^{2}\text{र}}{\text{ताय}^{2}}$ ऐसा लिख सकते हैं। यहाँ "ता" पर जो दो का अङ्क है वह दिखलाता है कि "र" का तात्कालिकवेग का वेग अर्थात् दूसरा तात्कालिकवेग है और "य" पर का दो का अङ्क दिखलाता है कि य के तात्कालिकवेग का वर्ग है इस प्रकार, भाज्य और हार दोनों मिल के दूसरे तात्कालिकसम्बन्ध को प्रकाश करते हैं। इसी प्रकार प्रत्येक फलों में य का तात्कालिकवेग एक ही कल्पना कर तीसरा, चौथा, पाँचवाँ, इत्यादि, तात्कालिकसम्बन्ध भी निकाला जाता है।

जैसे, जय, $\frac{\text{ता}^{2}\text{र}}{\text{ताय}^{2}}$ = र का दूसरा तात्कालिकसम्बन्ध।

तो $\frac{\text{ता}^{3}\text{र}}{\text{ताय}^{3}}$ = र का तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध।

इसी भाँति, $\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$ = र का न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध।

कभी कभी लाघवार्थ, प्रथम, द्वितीय, तृतीय, इत्यादि—तात्कालिकसम्बन्धों को य के फल के ऊपर स्वर दे देने से भी प्रकाश करते हैं अर्थात्, यदि र = फ (य)

तो, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ = फ$'$ (य), $\frac{\text{ता}^{2}\text{र}}{\text{ताय}^{2}}$ = फ$''$ (य), $\frac{\text{ता}^{3}\text{र}}{\text{ताय}^{3}}$ = फ$'''$ (य) इत्यादि, ऐसा भी लिखते हैं।

१७। विशेष स्थानों में कहीं कहीं बड़े लाघव से चाहे जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध निकल सकता है।

जैसे, यदि, (१) $र = क \cdot ला_इ य$

तो, $\frac{तार}{ताय} = \frac{क}{य}$, $\frac{ता^2र}{ताय^2} = -क \cdot य^{-2}$, $\frac{ता^3र}{ताय^3} = २क \cdot य^{-3}$

और, $\frac{ता^4र}{ताय^4} = -२ \times ३ \cdot कय^{-4}$, $\frac{ता^5र}{ताय^5} = २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot क \cdot य^{-5}$

यहाँ साधारणरूप जानने के लिये, ऊपर के सम्बन्धों को देखने ही से, $\frac{ता^नर}{ताय^न} = \frac{क}{न}(-१)^{न+१} \cdot \lfloor न \cdot य^{-न}$ ऐसा सिद्ध होता है।

यहाँ $\lfloor न = १ \cdot २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५ \ldots\ldots न$।

(२) यदि $र = ज्या\,(इ \cdot य + क)$

तो, $\frac{तार}{ताय} = इ \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क) = इ \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२})$

$\frac{ता^2र}{ताय^2} = इ^2 \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२}) = इ^2 \cdot ज्या(इ \cdot य + क + \frac{२\pi}{२})$

$\frac{ता^3र}{ताय^3} = इ^3 \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{२\pi}{२}) = इ^3 \cdot ज्या(इ \cdot य + क + \frac{३\pi}{२})$

सामान्य से, $\frac{ता^नर}{ताय^न} = इ^न \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{न \cdot \pi}{२}$

इसी प्रकार यदि, $र = कोज्या\,(इ \cdot य + क)$

तो, $\frac{तार}{ताय} = -इ \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क) = इ \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२})$

$\frac{ता^2र}{ताय^2} = -इ^2 \cdot ज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{\pi}{२})$

$= इ^2 \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{२\pi}{२})$

सामान्य से, $\frac{ता^नर}{ताय^न} = इ^न \cdot कोज्या\,(इ \cdot य + क + \frac{न \cdot \pi}{२})$

इसी प्रकार बहुतों का सम्बन्ध लाघव से निकल सकता है।

१८। दो फलों के घात के तुल्य यदि तीसरा फल हो तो नीचे लिखी हुई युक्ति से सम्बन्ध जान सकते हैं।

जैसे, यदि, $\text{स} = \text{र} \cdot \text{ल}$ जहाँ र, और ल दोनों य के फल हैं,

तो, पूर्वविधि से, $\dfrac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \text{र} \cdot \dfrac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \text{ल}$।

$$\frac{\text{ता}^{२}\text{स}}{\text{ताय}^{२}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \text{ल}$$

$$= \text{र}\, \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} + २\, \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \text{ल}।$$

और $$\frac{\text{ता}^{३}\text{स}}{\text{ताय}^{३}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} + २\, \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}}$$

$$+ २ \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} \cdot \text{ल}$$

$$= \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}} + ३\, \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + ३\, \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}} + \frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} \cdot \text{ल}।$$

इसी प्रकार $$\frac{\text{ता}^{४}\text{म}}{\text{ताय}^{४}} = \text{र} \cdot \frac{\text{ता}^{४}\text{म}}{\text{ताय}^{४}} + ४ \frac{\text{ता}^{३}\text{ल}}{\text{ताय}^{३}} \cdot \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + ६ \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{ल}}{\text{ताय}^{२}} \cdot \frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}$$

$$+ ४\, \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}} + \frac{\text{ता}^{४}\text{र}}{\text{ताय}^{४}} \cdot \text{ल}।$$

यहाँ देखो प्रत्येक सम्बन्धों में यदि आदि अन्त्य के घाताङ्क अर्थात् र और ल को छोड़ दें और ता पर की संख्या को, घातसङ्ख्या समझें तो सब पद ठीक द्वियुक्पद सिद्धान्तोत्पन्नपद के ऐसे हैं जहाँ पहला पद $\dfrac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ और दूसरा पद $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ है इस लिये दो फलों के घात का चाहो जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध निकालने के लिये यह क्रिया उत्पन्न होती है। दोनों फलों का पृथक् पृथक् तात्कालिकसम्बन्ध निकाल, दो पद कल्पना करो फिर जौन सा तात्कालिकसम्बन्ध जानना हो उतना ही घात द्वियुक्पद सिद्धान्त से उन दोनों पदों के योग का कर, आदि अन्त्य पद को उलटे फलों से गुण देना तो वही अभीष्टसम्बन्ध होगा

परन्तु घात करने में घातसङ्ख्या को "ता" के और स्वतन्त्रराशि अर्थात् "य" के ऊपर लिखना चाहिये।

जैसे, $स = र \cdot ल$ (जहाँ र और ल, य स्वतन्त्रराशि के फल हैं) समीकरण है यहाँ स का सातवाँ तात्कालिकसम्बन्ध जानना है तो, पूर्व-युक्ति से पहला पद, $\frac{तार}{ताय}$ दूसरा पद, $\frac{ताल}{ताय}$ यह है, अब इन दोनों के योग का सप्तघात करने से,

$$\left(\frac{तार}{ताय}+\frac{ताल}{ताय}\right)^{७} = \frac{ता^{७}र}{ताय^{७}} + ७\frac{ता^{६}र}{ताय^{६}}\cdot\frac{ताल}{ताय} + २१\frac{ता^{५}र}{ताय^{५}}\cdot\frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} + ३५\frac{ता^{४}र}{ताय^{४}}\cdot\frac{ता^{३}ल}{ताय^{३}} + ३५\frac{ता^{३}र}{ताय^{३}}\cdot\frac{ता^{४}ल}{ताय^{४}}$$

$$+ २१\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\cdot\frac{ता^{५}ल}{ताय^{५}} + ७\frac{तार}{ताय}\cdot\frac{ता^{६}ल}{ताय^{६}} + \frac{ता^{७}ल}{ताय^{७}}$$ यह हुआ

इसको प्रथम पद में र का सम्बन्ध है इस लिये इसे ल से और अन्त्य-पद में ल का सम्बन्ध है इस लिये इसे र से गुण देने से दोनों फलों के घात का अर्थात् स का सातवाँ तात्कालिकसम्बन्ध

$$= ल\cdot\frac{ता^{७}र}{ताय^{७}} + ७\frac{ता^{६}र}{ताय^{६}}\cdot\frac{ताल}{ताय} + २१\frac{ता^{५}र}{ताय^{५}}\cdot\frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} + ३५\frac{ता^{४}र}{ताय^{४}}\cdot\frac{ता^{३}ल}{ताय^{३}}$$

$$+ ३५\frac{ता^{३}र}{ताय^{३}}\cdot\frac{ता^{४}ल}{ताय^{४}} + २१\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\cdot\frac{ता^{५}ल}{ताय^{५}} + ७\frac{तार}{ताय}\cdot\frac{ता^{६}ल}{ताय^{६}} + \frac{ता^{७}ल}{ताय^{७}}\cdot र$$

$$= \frac{ता^{७}स}{ताय^{७}}$$

इसी प्रकार $$\frac{ता^{न}स}{ताय^{न}} = ल\cdot\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} + न\cdot\frac{ता^{न-१}र}{ताय^{न-१}}\cdot\frac{ताल}{ताय}$$

$$+\frac{न}{२}(न-१)\;\frac{ता^{न-२}र}{ताय^{न-२}}\cdot\frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} + \cdots + \frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}}\cdot र$$

इस सिद्धान्त को लेब्निज ❀ (Leibnitz) साहब ने निकाला है इसी कारण इसे "लेब्निज का सिद्धान्त" कहते हैं।

❀ सन् १७११ ईसवी में लेब्निज़ ने तात्कालिकसम्बन्ध के विषय में लण्डन के रायल् सोसाइटी में मुक़द्दमा दायर किया था कि डाक्टर कौन कहता है कि

इस सिद्धान्त से अनेक उदाहरणों की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है। जैसे, यदि $\text{स} = \text{इ}^{(\text{क}\cdot\text{य}+\text{म})}\ \text{ज्या}\ (\text{ख}\cdot\text{य}+\text{ग})$ इस में स का (न) संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध निकालना है तो लेब्निज़ के सिद्धान्त से, $\text{र} = \text{इ}^{(\text{क}\cdot\text{य}+\text{म})}$ और, $\text{ल} = \text{ज्या}\ (\text{ख}\cdot\text{य}+\text{ग})$

कल्पना करो तो, $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{क}\cdot\text{इ}^{(\text{क}\cdot\text{य}+\text{म})}$

$$\frac{\text{वा}^{२}\text{र}}{\text{वाय}^{२}} = \text{क}^{२}\cdot\text{इ}^{(\text{क}\cdot\text{य}+\text{म})}$$

$$\vdots$$

$\dfrac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{क}^{\text{न}}\cdot\ \text{इ}^{(\text{क}\cdot\text{य}+\text{म})}$ और सत्रहवें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से, $\dfrac{\text{ता}^{\text{न}}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{ख}^{\text{न}}\cdot\text{ज्या}\left(\text{खय}+\text{ग}+\dfrac{\text{न}\cdot\pi}{२}\right)$

इस पर से,

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = \text{र}\left\{\text{क}^{\text{न}}\cdot\text{ज्या}\ (\text{खय}+\text{ग}) + \text{न}\cdot\text{ख}\cdot\text{क}^{\text{न}-१}\cdot\text{ज्या}\left(\text{खय}+\text{ग}+\frac{\pi}{२}\right) + \frac{\text{न}\ (\text{न}\sim १)}{२}\cdot\text{ख}^{२}\cdot\text{क}^{\text{न}-२}\cdot\text{ज्या}\left(\text{खय}+\text{ग}+\frac{२\pi}{२}\right) + \cdots\cdots + \text{ख}^{\text{न}}\cdot\text{ज्या}\left(\text{खय}+\text{ग}+\frac{\text{न}\pi}{२}\right)\right\}।$$

इसी प्रकार विद्यार्थियों को चाहिये कि बहुत से उदाहरणों को कर लेब्निज़ के सिद्धान्त का अच्छी भाँति अभ्यास करें।

यह तात्कालिकसम्बन्ध तो न्यूटन साहब का निकाला है, लेब्निज़ ने चोरी से कुछ हेर फेर कर उसी को अपने ग्रन्थ में लिख दिया है। (See Hutton's Philosophical Dictionary, Vol. I, page 525.) यद्यपि उस समय में सोसाइटी के विचार से लेब्निज़ का दावा झूठा ठहरा तथापि अब आजकल सब विद्वानों के मत से तात्कालिकसम्बन्ध का प्रकाशक लेब्निज़ ही है। (See History of Philosophy by Ueberweg, Vol. II, page 99.)।

१९। नीचे लिखा हुआ समीकरण कभी कभी विशेष उदाहरणों में बहुत उपयोगी है इस लिये इस पर अवश्य ध्यान देना चाहिये।

$$\text{र}.\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}}}=\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{रल}}{\text{ताय}^{\text{न}}}-\text{न}.\frac{\text{ता}^{\text{न}-१}}{\text{ताय}^{\text{न}-१}}\left(\text{ल}.\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)$$

$$+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}-२}}{\text{ताय}^{\text{न}-२}}\left(\text{ल}.\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}\right)-\ldots\ldots$$

$$+(-१)^{\text{न}}\cdot\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}}\ldots\ldots(१)।$$

यहाँ न अभिन्न और धनसंख्या है।

कल्पना करो कि यह समीकरण किसी निश्चित न मान में ठीक है तो दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\text{र}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}+१}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}+१}}+\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$$

$$=\frac{\text{ता}^{\text{न}+१}\text{रल}}{\text{ताय}^{\text{न}+१}}-\text{न}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताय}^{\text{न}}}\left(\text{ल}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)$$

$$+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}-१}}{\text{ताय}^{\text{न}-१}}\left(\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}\right)-\ldots\ldots$$

$$+(-१)^{\text{न}}\cdot\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left(\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}}\right)\ldots\ldots(२)।$$

(१) समीकरण में यदि र के स्थान में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का उत्थापन देवो

$$\text{तो}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{ल}}{\text{ताय}^{\text{न}}}=\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{ताय}^{\text{न}}}\left(\text{ल}\cdot\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)-\text{न}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}-१}}{\text{ताय}^{\text{न}-१}}\left(\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{२}\text{र}}{\text{ताय}^{२}}\right)$$

$$+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}-२}}{\text{ताय}^{\text{न}-२}}\left(\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{३}\text{र}}{\text{ताय}^{३}}\right)$$

$$-\ldots\ldots+(-१)^{\text{न}}\cdot\text{ल}\cdot\frac{\text{ता}^{\text{न}+१}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}+१}}\ldots\ldots(\text{अ})।$$

दूसरे समीकरण के प्रथम पक्ष में द्वितीय पद का जो यह (अ)

मान निकला है इसे दूसरे समीकरण के दूसरे पक्ष के प्रथम पद को छोड़ बाकी पदों में क्रम से घटा देने से,

$$र \cdot \frac{ता^{न+१}ल}{ताय^{न+१}} = \frac{ता^{न+१}रल}{ताय^{न+१}} - (न+१)\frac{ता^{न}}{ताय^{न}}\left(ल \cdot \frac{तार}{ताय}\right)$$
$$+ \frac{(न+१)(न)}{२} \cdot \frac{ता^{न-१}}{ताय^{न-१}}\left(ल \cdot \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right)$$
$$- \cdots\cdots + (-१)^{न+१} ल \cdot \frac{ता^{न+१}र}{ताय^{न+१}} ।$$

यदि $म = न + १$ तो $र \cdot \frac{ता^{म}ल}{ताय^{म}}$

$$= \frac{ता^{म}रल}{ताय^{म}} - म \cdot \frac{ता^{म-१}}{ताय^{म-१}}\left(ल \cdot \frac{तार}{ताय}\right)$$
$$+ \frac{म(म-१)}{२} \cdot \frac{ता^{म-२}}{ताय^{म-२}}\left(ल \cdot \frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\right)$$
$$- \cdots\cdots + (-१)^{म} \cdot ल \cdot \frac{ता^{म}र}{ताय^{म}} \cdots\cdots (३) ।$$

(३) समीकरण से यह सिद्ध होता है कि यदि (१) समीकरण किसी निश्चित न मान में सत्य हो तो न + १ इस मान में भी सत्य होगा पुनः, न के स्थान में न + १ इस मान का उत्थापन देने से न + २ इस मान में भी ठीक होगा इस प्रकार पुनः पुनः उत्थापन देने से यही सिद्ध होगा कि निश्चित न मान के अनन्तर चाहे जो अभिन्न और धन न का मान मानो सब में (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु यदि न = १ तो स्पष्ट देख पड़ता है कि (१) समीकरण सत्य है इस लिये सर्वदा सब न के मान में (१) समीकरण ठीक है यह सिद्ध हुआ ।

२० । यदि $ल = फ(य)$ इस का विस्तार एक श्रेढ़ी में हो जिस का रूप, $ल = अ + क \cdot य + ख \cdot य^{२} + ग \cdot य^{३} + घ \cdot य^{४} + \cdots$ ऐसा हो, जहाँ अ, क, ख इत्यादि स्थिर हैं तो बार बार तात्कालिकसम्बन्ध निकाल और उन में य का मान शून्य मानने से क, ख, ग इत्यादि

प्रकट हो सकते हैं, और फल में य का मान शून्य मानने से अ का मान भी व्यक्त हो जायगा।

जैसे,

यदि, $स = अ + क \cdot य + ख \cdot य^{2} + ग \cdot य^{3} + घ \cdot य^{4} + \cdots$

तो तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा से,

$$\frac{तास}{ताय} = क + २ख \cdot य + ३ग \cdot य^{2} + ४घ \cdot य^{3} + \cdots$$

$$\frac{ता^{2}स}{ताय^{2}} = २ख + २ \cdot ३ग \cdot य + ३ \cdot ४घ \cdot य^{2} + \cdots$$

$$\frac{ता^{3}स}{ताय^{3}} = २ \cdot ३ग + २ \cdot ३ \cdot ४घ \cdot य + \cdots$$

$$\frac{ता^{4}स}{ताय^{4}} = २ \cdot ३ \cdot ४ \cdot घ + \cdots$$

प्रत्येक समीकरणों मे य का शून्य मान मानने से कल्पना करो कि $\frac{तास}{ताय} = त_1$। $\frac{ता^{2}स}{ताय^{2}} = त_2$। इत्यादि तो $त_1 = क$। $\frac{त_2}{२} = ख$। $\frac{त_3}{२ \cdot ३} = ग$। और $\frac{त_4}{२ \cdot ३ \cdot ४} = घ$ इत्यादि होंगे और मानो कि जब $य = ०$ तो $स = त = अ$, अब इन पर से,

$$स = त + त_1 य + \frac{त_2}{२} य^{2} + \frac{त_3}{२ \cdot ३} य^{3} + \frac{त_4}{२ \cdot ३ \cdot ४} य^{4} + \cdots + \frac{त_न}{\underline{|न}} \cdot य^{न}।$$

इसे म्याक्लारिन (Maclaurin) का सिद्धान्त कहते हैं इस से अनेक नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं।

इस की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) कल्पना करो कि $स = (य + आ)^{न}$ इस में

यदि $य = ०$ तो $स = आ^{न} = त$।

$\frac{तास}{ताय} = न (य + आ)^{न-1}$ यदि $य = ०$ तो $त_1 = न \cdot आ^{न-1}$।

इसी भांति सब सम्बन्धों में $य = ०$ करने से,

$\frac{ता^२स}{ताय^२} = न(न-१)(य+आ)^{न-२}$ । $त_२ = न(न-१)आ^{न-२}$ ।

$\frac{ता^३स}{ताय^३} = न(न-१)(न-२)(य+आ)^{न-३}$ और

$त_३ = न(न-१)(न-२)आ^{न-३}$ इत्यादि होंगे,

अब इन को म्याक्लारिन के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$स = (य+आ)^न = आ^न + न \cdot आ^{न-१} य + \frac{न(न-१)}{२} आ^{न-२} य^२$$

$$+ \frac{न(न-१)(न-२)}{२ \cdot ३} आ^{न-३} य^३ + \cdots\cdots$$

इसी को द्वियुक्पद सिद्धान्त कहते हैं।

(२) यदि $स = फ(य) = ज्याय$, तो यहां जब, $य = ०$ तो $स = ०$ ।

$\frac{तास}{ताय} = कोज्याय$ यदि $य = ०$ तो $त_१ = १$ ।

$\frac{ता^२स}{ताय^२} = -ज्याय$ यदि $य = ०$ तो $त_२ = ०$ ।

$\frac{ता^३स}{ताय^३} = -कोज्याय$ यदि $य = ०$ तो $त_३ = -१$ ।

$\frac{ता^४स}{ताय^४} = ज्याय$ यदि $य = ०$ तो $त_४ = ०$ ।

$\frac{ता^५स}{ताय^५} = कोज्याय$ यदि $य = ०$ तो $त_५ = १$ । इत्यादि

$$इस\ लिये\ ज्याय = य - \frac{य^३}{२ \cdot ३} + \frac{य^५}{२ \cdot ३ \cdot ४ \cdot ५} - \frac{य^७}{\underline{|७}} + \cdots\cdots$$

और जीवा का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$कोज्याय = १ - \frac{य^२}{२} + \frac{य^४}{२ \cdot ३ \cdot ४} - \frac{य^६}{\underline{|६}} + \cdots\cdots$$

जीवा में कोटिज्या का भाग देने से,

$$स्पय = य + \frac{य^३}{१ \cdot ३} + \frac{२य^५}{३ \cdot ५} + \frac{१७य^७}{५ \cdot ७ \cdot ९} + \cdots\cdots$$

कोटिज्या का एक में भाग देने से,

$$\text{छेय} = १ + \frac{य^२}{२} + \frac{५य^४}{२\cdot३\cdot४} + \cdots$$

इस प्रकार चापीयमान से जीवा कोटिज्या इत्यादि जानने के लिये अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं।

(३) $स = फ(य) = ज्या^{-१} य$ तो यहाँ $य = ०$ तो $त = ०$।

$$\frac{तास}{ताय} = त_१ + २त_२ \frac{य}{२} + ३त_३ \frac{य_२}{२\cdot३} + ४त_४ \frac{य^३}{\underline{|४}} + \cdots = \frac{१}{\sqrt{१-य^२}}$$

यहाँ $\frac{१}{\sqrt{१-य^२}} = (१-य^२)^{-\frac{१}{२}}$ इसे द्वियुक्पद सिद्धान्त से वा आसन्नमूल से—

फैलाने से $\frac{१}{\sqrt{१-य^२}} = १ + \frac{य^२}{२} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}य^४ + \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६}य^६ + \cdots$

इसलिये $त_१ + २त_२ \frac{य}{२} + ३त_३ \frac{य^२}{\underline{|३}} + ४त_४ \frac{य^३}{\underline{|४}} + \cdots$

$$= १ + \frac{य^२}{२} + \frac{१\cdot३य^४}{२\cdot४} + \frac{१\cdot३\cdot५य^६}{२\cdot४\cdot६} + \cdots$$

यहाँ य के समान घातों का गुणक समान करने से,

$त_१ = १,\ त_२ = ०,\ \frac{३त_३}{२\cdot३} = \frac{१}{२},\ \therefore त_३ = १$

$त_४ = ०,\ \frac{५त_५}{\underline{|५}} = \frac{१\cdot३}{२\cdot४},\ \therefore त_५ = १\cdot३^२,\ त_६ = ०$

$\frac{७त_७}{\underline{|७}} = \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६},\ \therefore त_७ = १\cdot३^२\cdot५^२$

$$\therefore ज्या^{-१}य = य + \frac{१}{१\cdot२}\cdot\frac{य^३}{३} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}\cdot\frac{य^५}{५} + \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६}\cdot\frac{य^७}{७} + \cdots$$

इस में सामान्य रीति से न संख्यकपद

$$= \frac{१\cdot३\cdot५\cdots(२न-३)}{२\cdot४\cdot६\cdots(२न-२)}\cdot\frac{य^{२न-१}}{२न-१} \text{ ऐसा होगा।}$$

इस श्रेढ़ी में यदि ज्या$^{-1}$ य $= \frac{२\pi}{१२}$ तो य $= \frac{१}{२}$

$$\therefore \frac{२\pi}{१२} = \frac{१}{२} + \frac{१}{१\cdot२}\cdot\frac{१}{३\cdot८} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}\cdot\frac{१}{५\cdot३२} + \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६}\cdot\frac{१}{७\cdot१२८} + \cdots ।$$

(४) यदि स = स्प$^{-1}$ य तो यदि य = ० तो त = ० ।

$$\frac{तास}{ताय} = \frac{१}{१+य^२} = १ - य^२ + य^४ - य^६ + \cdots\cdots$$

$$= त_१ + २त_२\cdot\frac{य}{१\cdot२} + ३त_३\frac{य^२}{२\cdot३} + ४त_४\frac{य^३}{२\cdot३\cdot४} + \cdots$$

(३) उदाहरण के ऐसा यहाँ भी $त_१ = १$, $त_२ = ०$ ।

$$\frac{त_३}{२} = -१ \therefore त_३ = -२ । त_४ = ०$$

$$\frac{त_५}{२\cdot३\cdot४} = १ \therefore त_५ = २\cdot३\cdot४$$

$$\therefore स = य - \frac{२य^३}{२\cdot३} + \frac{२\cdot३\cdot४\, य^५}{२\cdot३\cdot४\cdot५} - \cdots\cdots$$

वा, स्प$^{-1}$ य $= य - \frac{य^३}{३} + \frac{य^५}{५} - \frac{य^७}{७} + \cdots$ । इस में यदि य = १

तो $\frac{\pi}{४} = १ - \frac{१}{३} + \frac{१}{५} - \frac{१}{७} + \cdots\cdots$ ।

जब कि $\frac{\pi}{४} =$ स्प$^{-1}\frac{१}{२}$ + स्प$^{-1}\frac{१}{३}$

और स्प$^{-1}\frac{१}{२} = \frac{१}{२} - \frac{१}{३\cdot२^३} + \frac{१}{५\cdot२^५} - \frac{१}{७\cdot२^७} + \cdots\cdots$ ।

स्प$^{-1}\frac{१}{३} = \frac{१}{३} - \frac{१}{३\cdot३^३} + \frac{१}{५\cdot३^५} - \frac{१}{७\cdot३^७} + \cdots$ ।

इस लिये $\frac{\pi}{४} = \left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३}\right) - \frac{१}{३}\left(\frac{१}{२^३} + \frac{१}{३^३}\right) + \cdots\cdots$ ।

और जब कि $\frac{\pi}{४}=४स्प^{-१}\frac{१}{५}-स्प^{-१}\frac{१}{२३९}$ तो, पूर्व युक्ति से

$$\frac{\pi}{४}=४\left\{\frac{१}{५}-\frac{१}{३\cdot५^{३}}+\frac{१}{५\cdot५^{५}}-\frac{१}{७\cdot५^{७}}+\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{१}{२३९}-\frac{१}{३(२३९)^{३}}+\frac{१}{५(२३९)^{५}}-\frac{१}{७(२३९)^{७}}+\cdots\right\}।$$

(५) यदि $स=ला(१+य)$ तो यदि $य=०$ तो $स=०$।

$$\frac{तास}{ताय}=\frac{१}{१+य}=१-य+य^{२}-य^{३}+\cdots\cdots$$

$$=त_{१}+२\,त_{२}\frac{य}{२}+३\,त_{३}\frac{य^{२}}{२\cdot३}+\cdots\cdots$$

अब ठीक तीसरे वा चौथे उदाहरण की विधि से स का मान लावो तो

$$स=ला(१+य)=य-\frac{य^{२}}{२}+\frac{य^{३}}{३}-\frac{य^{४}}{४}+\cdots\cdots$$

परन्तु यहाँ अन्योन्याश्रित दोष पड़ता है इस लिये द्वितीयाध्याय के दूसरे सिद्धान्त की विधि लघुरिकथ निकालने के लिये बहुत उत्तम है।

जब कि द्वियुकपद सिद्धान्त म्याक्लारिन् के सिद्धान्त ही से उत्पन्न होता है और द्वियुकपद सिद्धान्त से लघुरिकथ का सिद्धान्त उत्पन्न होता है इस लिये अन्योन्याश्रय दोष का निवारण भी हो सकता है।

(६) दूसरे अध्याय के दूसरे सिद्धान्त के

$$अ^{य}=१+(ला_{इ}अ)\,य+(ला_{इ}अ)^{२}\frac{य^{२}}{१\cdot२}+\cdots\cdots(१)$$

इस समीकरण में $इ=अ$ कल्पना करें तो (१)

इस का मान $इ^{य}=१+य+\frac{य^{२}}{१\cdot२}+\frac{य^{३}}{१\cdot२\cdot३}+\cdots\cdots\cdots\cdots(२)$

ऐसा होगा।

(२) इस समीकरण में यदि $य=य\sqrt{-१}$ वा $य=-य\sqrt{-१}$

तो $इ^{य\sqrt{-१}}=१+य\sqrt{-१}-\frac{य^{२}}{१\cdot२}-\frac{य^{३}\sqrt{-१}}{१\cdot२\cdot३}+\cdots\cdots$

$$इ^{-य\sqrt{-१}} = १ - य\sqrt{-१} - \frac{य^2}{१ \cdot २} + \frac{य^3\sqrt{-१}}{१ \cdot २ \cdot ३} + \cdots\cdots$$

इन दोनों को परस्पर घटा और जोड़ देने से,

$$इ^{य\sqrt{-१}} - इ^{-य\sqrt{-१}} = २\sqrt{-१}\left(य - \frac{य^3}{१\cdot२\cdot३} + \frac{य^5}{१\cdot२\cdot३\cdot४\cdot५} - \cdots\right)$$

$$इ^{य\sqrt{-१}} + इ^{-य\sqrt{-१}} = २\left(१ - \frac{य^2}{१\cdot२} + \frac{य^4}{१\cdot२\cdot३\cdot४} - \cdots\cdots\right)$$

इस लिये दूसरे उदाहरण को देखने से,

$$\frac{इ^{य\sqrt{-१}} - इ^{-य\sqrt{-१}}}{२\sqrt{-१}} = ज्याय। \quad \frac{इ^{य\sqrt{-१}} + इ^{-य\sqrt{-१}}}{२} = कोज्याय \cdots (३)$$

(३) समीकरण से,

$$इ^{\pm य\sqrt{-१}} = कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-१}$$

$$\therefore इ^{\pm मय\sqrt{-१}} = (कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-१})^{म} \cdots\cdots (क)।$$

परन्तु (३) समीकरण में यदि य = मय

$$तो \quad \frac{इ^{मय\sqrt{-१}} - इ^{-मय\sqrt{-१}}}{२\sqrt{-१}} = ज्यामय।$$

$$\frac{इ^{मय\sqrt{-१}} + इ^{-मय\sqrt{-१}}}{२} = कोज्यामय।$$

$$\therefore इ^{\pm मय\sqrt{-१}} = कोज्यामय \pm ज्यामय\sqrt{-१} \cdots\cdots (ख)।$$

इस लिये (क) और (ख) ये दोनों समान हुए अर्थात्

$$(कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-१})^{म} = कोज्यामय \pm ज्यामय\sqrt{-१} \cdots\cdots (ग)$$

इसी को "डेमाइवर" (De moivre) का सिद्धान्त कहते हैं।

(७) छठवें उदाहरण के (ख) समीकरण से,

$$इ^{मय\sqrt{-१}} = कोज्यामय + ज्यामय\sqrt{-१}।$$

$$इ^{-मय\sqrt{-१}} = कोज्यामय - ज्यामय\sqrt{-१}।$$

परस्पर भाग देने से,

$$\frac{इ^{मय\sqrt{-१}}}{इ^{-मय\sqrt{-१}}} = इ^{२मय\sqrt{-१}} = \frac{कोज्यामय + ज्यामय\sqrt{-१}}{कोज्यामय - ज्यामय\sqrt{-१}}$$

$$=\frac{१+स्पमय\sqrt{-१}}{१-स्पमय\sqrt{-१}}$$ । दोनों का लघुरिक्थ लेने से,

$$२ मय\sqrt{-१} = ला(१+स्पमय\sqrt{-१})-ला(१-स्पमय\sqrt{-१})$$

अब यहां पांचवें उदाहरण से $य = \pm स्पमय\sqrt{-१}$

ऐसा मान कर लघुरिक्थों का अन्तर निकालो तो

$$२ मय\sqrt{-१}=२\sqrt{-१}\left(स्पमय-\frac{स्प^३मय}{३}+\frac{स्प^५मय}{५}-\frac{स्प^७मय}{७}+\cdots\right)$$

$$\therefore मय=स्पमय-\frac{स्प^३मय}{३}+\frac{स्प^५मय}{५}-\frac{स्प^७मय}{७}+\cdots\cdots ।$$

यह ठीक चौथे उदाहरण के ऐसा उत्पन्न होता है।

इसी प्रकार अब, $इ^{२मय\sqrt{-१}}=\frac{१+स्पमय\sqrt{-१}}{१-स्पमय\sqrt{-१}}$

$$\therefore इ^{२मय\sqrt{-१}}+१=\frac{२}{१-स्पमय\sqrt{-१}}$$

और $इ^{२मय\sqrt{-१}}-१=\frac{२\ स्पमय\sqrt{-१}}{१-स्पमय\sqrt{-१}}$ । परस्पर भाग देने से,

$$\frac{इ^{२मय\sqrt{-१}}-१}{इ^{२मय\sqrt{-१}}+१}=स्पमय\sqrt{-१}$$

इन दोनों का वर्ग एक में घटा देने से,

$$\frac{४इ^{२मय\sqrt{-१}}}{(इ^{२मय\sqrt{-१}}+१)^२}=१+स्प^२मय=छे^२मय$$

$$\therefore \frac{२इ^{मय\sqrt{-१}}}{इ^{२मय\sqrt{-१}}+१}=छेमय ।$$

प्रसङ्ग से और उदाहरणों को दिखाते हैं।

(८) जब स्पष्ट है कि

$य=०, \pm \pi, \pm २\pi, \pm ३\pi$ इत्यादि हो तो ज्याय$=०$ तो

ज्याय$=$अ$\cdot$य $(\pi^२-य^२)(२^२\pi^२-य^२)(३^२\pi^२-य^२)\cdots$ऐसा

कल्पना कर सकते हैं, इस में यदि $क = अ \cdot \pi^2 \cdot २^2 \pi^2 \cdot ३^2 \pi^2 \cdots$

$$तो\ ज्याय = क \cdot य \left(१ - \frac{य^2}{\pi^2}\right)\left(१ - \frac{य^2}{२^2\pi^2}\right)\left(१ - \frac{य^2}{३^2\pi^2}\right)\cdots$$

$$और\ \frac{ज्याय}{य} = क \left(१ - \frac{य^2}{\pi^2}\right)\left(१ - \frac{य^2}{२^2\pi^2}\right)\left(१ - \frac{य^2}{३^2\pi^2}\right)\cdots$$

अब यहां यदि $य = ०$ तो $\frac{ज्याय}{य} = १ = क$

$$इस\ लिये\ ज्याय = य \left(१ - \frac{य^2}{\pi^2}\right)\left(१ - \frac{य^2}{२^2\pi^2}\right)\left(१ - \frac{य^2}{३^2\pi^2}\right)\cdots(१)।$$

इसी प्रकार जब $य = \pm\frac{\pi}{२}, \pm\frac{३\pi}{२}, \pm\frac{५\pi}{२}$ इत्यादि

तो, कोज्याय $= ०$, इस लिये

$$कोज्याय = अ\left(\frac{\pi^2}{२^2} - य^2\right)\left(\frac{३^2\pi^2}{२^2} - य^2\right)\left(\frac{५^2\pi^2}{२^2} - य^2\right)\cdots इत्यादि$$

ऐसा मान सकते हैं। यहां भी यदि $क = अ \cdot \frac{\pi^2}{२^2} \cdot \frac{३^2\pi^2}{२^2}\cdots$

$$तो,\ कोज्याय = क\left(१ - \frac{२^2य^2}{\pi^2}\right)\left(१ - \frac{२^2य^2}{३^2\pi^2}\right)\left(१ - \frac{२^2य^2}{५^2\pi^2}\right)\cdots।$$

यहाँ भी यदि $य = ०$ तो कोज्याय $= १ = क$

$$इस\ लिये\ कोज्याय = \left(१ - \frac{२^2य^2}{\pi^2}\right)\left(१ - \frac{२^2य^2}{३^2\pi^2}\right)\left(१ - \frac{२^2य^2}{५^2\pi^2}\right)\cdots(२)।$$

(९) आठवें उदाहरण में (१) इस में यदि दूसरे पक्ष का स्वरूप $य\left(१ - \frac{य^2}{\pi}\right)$ इत्यादि का घात करके बनाओ

$$तो,\ ज्याय = य\ \left\{१ - \frac{य^2}{\pi^2}\left(\frac{१}{१^2} + \frac{१}{२^2} + \frac{१}{३^2} + \cdots\right)\right\} + \cdots$$

परन्तु दूसरे उदाहरण से,

$$ज्याय = य\left(१ - \frac{य^2}{२\cdot३} + \frac{य^4}{२\cdot३\cdot४\cdot५} - \cdots\right)$$

इस लिये य के समान घातों के गुणकों को समान करने से,

$$\frac{१}{\pi^{२}}\left(\frac{१}{१^{२}}+\frac{१}{२^{२}}+\frac{१}{३^{२}}+\cdots\right)=\frac{१}{६}।$$

वा, $\frac{१}{१^{२}}+\frac{१}{२^{२}}+\frac{१}{३^{२}}+\frac{१}{४^{२}}+\cdots\cdots=\frac{\pi^{२}}{६}\cdots\cdots(१)$।

इसी प्रकार आठवें उदाहरण के (२) इस में भी यदि याव कर दूसरे पक्ष का रूप बनाओ तो,

$$\text{कोज्याय} = १-\frac{२^{२}य^{२}}{\pi^{२}}\left(\frac{१}{१^{२}}+\frac{१}{३^{२}}+\frac{१}{५^{२}}+\cdots\right)+\cdots$$

परन्तु दूसरे उदाहरण के समीकरण से,

$$\text{कोज्याय} = १-\frac{य^{२}}{२}+\frac{य^{४}}{२\cdot३\cdot४}-\cdots\cdots$$

इस लिये यहाँ भी दोनों पक्षों में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से,

$$\frac{२^{२}}{\pi^{२}}\left(\frac{१}{१^{२}}+\frac{१}{३^{२}}+\frac{१}{५^{२}}+\cdots\cdots\right)=\frac{१}{२}$$

$$\therefore \frac{१}{१^{२}}+\frac{१}{३^{२}}+\frac{१}{५^{२}}+\frac{१}{७^{२}}+\cdots\cdots=\frac{\pi^{२}}{८}\cdots\cdots(२)।$$

(१०) नवें उदाहरण के (१) और (२) समीकरणों का अन्तर करने से,

$$\frac{१}{२^{२}}+\frac{१}{४^{२}}+\frac{१}{६^{२}}+\frac{१}{८^{२}}+\cdots\cdots=\frac{\pi^{२}}{२४}\cdots\cdots(१)$$

दोनों को जोड़ देने से,

$$२\left(\frac{१}{१^{२}}+\frac{१}{३^{२}}+\frac{१}{५^{२}}+\cdots\right)+\left(\frac{१}{२^{२}}+\frac{१}{४^{२}}+\frac{१}{६^{२}}+\cdots\cdots\right)=\frac{७\pi^{२}}{२४}$$

$$\therefore \frac{२}{७}\left(\frac{१}{१^{२}}+\frac{१}{३^{२}}+\frac{१}{५^{२}}+\cdots\right)+\frac{१}{७}\left(\frac{१}{२^{२}}+\frac{१}{४^{२}}+\frac{१}{६^{२}}+\cdots\right)=\frac{\pi^{२}}{२४}$$

इस प्रकार जोड़ घटा कर अनेक समीकरण बना सकते हो।

(११) अथ आठवें उदाहरण से यह सिद्ध है कि,

$$\text{ज्याय} = \text{य}\left(१-\frac{\text{य}^२}{\pi^२}\right)\left(१-\frac{\text{य}^२}{२^२\pi^२}\right)\left(१-\frac{\text{य}^२}{३^२\pi^२}\right)\cdots\cdots$$

तो दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से,

$$१ = \text{ल}\,(\text{ज्याय}) = \text{लय} + \text{ल}\left(१-\frac{\text{य}^२}{\pi^२}\right) + \text{ल}\left(१-\frac{\text{य}^२}{२^२\pi^२}\right) + \cdots(१)।$$

(१) इसका तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से,

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{कोज्याय}}{\text{ज्याय}} = \frac{१}{\text{य}} - \frac{\frac{२\text{य}}{\pi^२}}{१-\frac{\text{य}^२}{\pi^२}} - \frac{\frac{२\text{य}}{२^२\pi^२}}{१-\frac{\text{य}^२}{२^२\pi^२}} - \cdots\cdots$$

$$\text{या,}\ \frac{१}{\text{स्पय}} = \frac{१}{\text{य}} - \frac{\frac{२\text{य}}{\pi^२}}{१-\frac{\text{य}^२}{\pi^२}} - \frac{\frac{२\text{य}}{\pi^२}}{२^२-\frac{\text{य}^२}{\pi^२}} - \cdots\cdots\ (२)$$

अब यदि $\frac{\text{य}^२}{\pi^२} = \text{प}^२$ तो $\text{य}^२ = \pi^२\cdot\text{प}^२ \ \therefore\ \text{य} = \pi\text{प}$,

और $\frac{२\text{य}}{\pi^२} = \frac{२\text{प}}{\pi}$ इस पर से दूसरे समीकरण का रूप,

$$\frac{१}{\text{स्प}\,\pi\text{प}} = \frac{१}{\pi\cdot\text{प}} - \frac{२\text{प}}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२-\text{प}^२} + \frac{१}{२^२-\text{प}^२} + \frac{१}{३^२-\text{प}^२} + \cdots\right\}\cdots(३)$$

इसी प्रकार यदि $\frac{\text{य}^२}{\pi^२} = -\text{प}^२$ तो, $\text{य} = \pi\cdot\text{प}\sqrt{-१}$

और $\frac{२\text{य}}{\pi^२} = \frac{२\text{प}\sqrt{-१}}{\pi}$ और सातवें उदाहरण से,

$$\text{स्प}\,(\pi\cdot\text{प}\sqrt{-१}) = \frac{१}{\sqrt{-१}}\cdot\frac{e^{-२\pi\text{प}}-१}{e^{-२\pi\text{प}}+१} = \frac{१}{\sqrt{-१}}\cdot\frac{१-e^{२\pi\text{प}}}{१+e^{२\pi\text{प}}}$$

$$\therefore\ \frac{१}{\text{स्प}\,(\pi\text{प}\sqrt{-१})} = \frac{(१+e^{२\pi\text{प}})\sqrt{-१}}{१-e^{२\pi\text{प}}}$$

$$=\frac{१}{\pi प\sqrt{-१}}-\frac{२प\sqrt{-१}}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२+प^२}+\frac{१}{२^२+प^२}+\frac{१}{३^२+प^२}+\cdots\right\}\ldots(४)।$$

(३) समीकरण में समशोधन करने से,

$$\frac{१}{\pi प}-\frac{१}{स्प\pi प}=\frac{२प}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२-प^२}+\frac{१}{२^२-प^२}+\frac{१}{३^२-प^२}+\cdots\right\}$$

वा, $$\frac{१}{२प^२}-\frac{\pi}{२प\cdot स्प\pi प}=\frac{१}{१^२-प^२}+\frac{१}{२^२-प^२}+\frac{१}{३^२-प^२}+\cdots\ (५)।$$

इसी प्रकार चौथे समीकरण से,

$$\frac{\pi}{२प}\cdot\frac{इ^{२\pi प}+१}{इ^{२\pi प}-१}-\frac{१}{२प^२}=\frac{१}{१^२+प^२}+\frac{१}{२^२+प^२}+\frac{१}{३^२+प^२}+\cdots(६)।$$

(१२) आठवें उदाहरण से जो

$$कोज्याय=\left(१-\frac{२^२य^२}{\pi^२}\right)\left(१-\frac{२^२य^२}{३^२\pi^२}\right)\left(१-\frac{२^२य^२}{५^२\pi^२}\right)\cdots$$

यह सिद्ध है, इस का लघुरिक्थ लेने से,

$$ला(कोज्याय)=ला\left(१-\frac{२^२य^२}{\pi^२}\right)+ला\left(१-\frac{२^२य^२}{३^२\pi^२}\right)+ला\left(१-\frac{२^२य^२}{५^२\pi^२}\right)\ldots(१)$$

(१) इस के दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्ध निकाल ऋण एक से गुण देने से,

$$\frac{ज्याय}{कोज्याय}=\frac{\frac{८य}{\pi^२}}{१-\frac{२^२य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{८य}{३^२\pi^२}}{१-\frac{२^२य^२}{३^२\pi^२}}+\frac{\frac{८य}{५^२\cdot\pi^२}}{१-\frac{२^२य^२}{५^२\pi^२}}+\cdots\cdots$$

$$=२य\left\{\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{१-\frac{२^२य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{३^२\pi^२}}{१-\frac{२^२य^२}{३^२\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{५^२\pi^२}}{१-\frac{२^२य^२}{५^२\pi^२}}+\cdots\right\}$$

$$=२य\left\{\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{१-\frac{२^२य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{३^२-\frac{२^२य^२}{\pi^२}}+\frac{\frac{२^२}{\pi^२}}{५^२-\frac{२^२य^२}{५^२\pi^२}}+\cdots\right\}\ldots\ldots(२)$$

यहां भी कल्पना करो कि $\frac{२^२ य^२}{\pi^२} = प^२ \therefore य = \frac{\pi \cdot प}{२}$

और $२य \cdot \frac{२^२}{\pi^२} = \frac{४प}{\pi}$ तो दूसरे समीकरण का रूप,

$$स्पय = स्प\frac{\pi \cdot प}{२} = \frac{४प}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२-प^२}+\frac{१}{३^२-प^२}+\frac{१}{५^२-प^२}+\cdots\right\}$$

$$\therefore \frac{१}{१^२-प^२}+\frac{१}{३^२-प^२}+\frac{१}{५^२-प^२}+\cdots = \frac{\pi}{४प}\cdot स्प\frac{\pi\cdot प}{२}\cdots(३)$$

इसी प्रकार यदि $\frac{२^२य^२}{\pi^२} = -प^२$ तो $२य = \pi प\sqrt{-१}$

$२य\sqrt{-१} = -\pi प$ और $२य\,\frac{२^२}{\pi^२} = \frac{४प\sqrt{-१}}{\pi}$

अब यहाँ भी सातवें उदाहरण से,

$$स्पय = स्प\frac{\pi प\sqrt{-१}}{२} = \frac{इ^{-\pi \cdot प}-१}{इ^{-\pi प}+१}\cdot\frac{१}{\sqrt{-१}} = \frac{१-इ^{\pi प}}{१+इ^{\pi प}}\cdot\frac{१}{\sqrt{-१}}$$

$$= \frac{४प\sqrt{-१}}{\pi}\left\{\frac{१}{१^२+प^२}+\frac{१}{३^२+प^२}+\frac{१}{५^२+प^२}+\cdots\right\}$$

$$\therefore \frac{१}{१^२+प^२}+\frac{१}{३^२+प^२}+\frac{१}{५^२+प^२}+\cdots = -\frac{\pi}{४प}\cdot\frac{१-इ^{\pi प}}{१+इ^{\pi प}}$$

$$= \frac{\pi}{४प}\cdot\frac{इ^{\pi प}-१}{इ^{\pi प}+१}$$

(१२) बारहवें उदाहरण के (३) समीकरण में

जो $\frac{\pi}{४प}\cdot स्प\frac{\pi\cdot प}{२}$ है इसको $\frac{\pi}{४प}\cdot\frac{\pi\cdot प}{२}\cdot\frac{स्प\frac{\pi प}{२}}{\frac{\pi\cdot प}{२}}$

$= \frac{\pi^२}{८}\cdot\frac{स्प\frac{\pi प}{२}}{\frac{\pi\cdot प}{२}}$ ऐसे भी लिख सकते हो,

अब उसी समीकरण में यदि य=० मानो तो दहिने ओर का पक्ष $\frac{\pi^२}{८}$ के तुल्य होगा और बायें ओर का पक्ष $\frac{१}{१^२}+\frac{१}{३^२}+\frac{१}{५^२}+\cdots$ इसके तुल्य होगा,

इस लिये $\frac{\pi^२}{८}=\frac{१}{१^२}+\frac{१}{३^२}+\frac{१}{५^२}+\cdots\cdots$

यही ठीक नवें उदाहरण के (२) समीकरण से भी सिद्ध हुआ है।

(१४) यदि ज्यास=म·ज्याय तो स=ज्या$^{-१}$(म·ज्याय)=ज्या$^{-१}$र

यहाँ र=म·ज्याय, अब यहाँ य=० तो त=०।

फिर तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा से,

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}}=\frac{१}{\sqrt{१-\text{र}^२}}\text{ परन्तु }\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\text{म·कोज्याय}$$

$$\therefore\ \frac{\text{तास}}{\text{तार}}\times\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}=\frac{\text{म·कोज्याय}}{\sqrt{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}}=\text{म}=\text{त}_१\text{ यदि य}=०\text{।}$$

$$\frac{\text{ता}^२\text{स}}{\text{ताय}^२}$$

$$=\frac{-\text{म·ज्याय}\sqrt{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}+\text{म}^३\text{·कोज्या}^२\text{य}(१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}\text{·ज्याय}}{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}$$

यहाँ यदि य=०, तो $\text{त}_२=०$।

$$\frac{\text{ता}^३\text{स}}{\text{ताय}^३}$$

$$=\frac{-\text{म·कोज्याय}\sqrt{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}+\text{म}^३\text{·ज्या}^२\text{य·कोज्याय}(१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}}{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}$$

$$-\frac{२\,\text{म}^३\text{·ज्या}^२\text{य·कोज्याय}\,(१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}}{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}$$

$$+\frac{\text{म}^३\text{·कोज्या}^३\text{य}\,(१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य})^{-\frac{१}{२}}}{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}$$

$$+\frac{\text{म}^५\text{·कोज्या}^३\text{य·ज्या}^२\text{य}\,(१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य})^{-\frac{३}{२}}}{१-\text{म}^२\text{·ज्या}^२\text{य}}$$

$+\text{ता}\{१-\text{म}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{य}\}$

$$\frac{\{\text{म}\cdot\text{ज्याय}\sqrt{१-\text{म}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{य}}-\text{म}^3\cdot\text{कोज्या}^2\text{य}\cdot\text{ज्याय}(१-\text{म}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{य})^{-\frac{१}{२}}\}}{(१-\text{म}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{य})^2}$$

अथ, यदि $\text{य}=०$ तो, $\text{त}_3=-\text{म}+\text{म}^3=\text{म}(\text{म}^2-१)$

इस को (२०) वें प्रक्रम में जो म्याक्लारिन् का सिद्धान्त है उसमें उत्थापन देने से,

$$\text{स}=\text{म}\cdot\text{य}+\frac{\text{म}(\text{म}^2-१)}{२\cdot३}\text{य}^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\text{म}\cdot\text{य}+\frac{\text{म}(\text{म}+१)(\text{म}-१)}{\underline{|३}}\text{य}^3+\frac{\text{म}(\text{म}^2-१)(३\text{म}+१)(३\text{म}-१)}{\underline{|५}}\text{य}^5+\cdots$$

अथ वा इस उदाहरण मे जो $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}=\frac{\text{म}\cdot\text{कोज्याय}}{\sqrt{१-\text{म}^2\cdot\text{ज्या}^2\text{य}}}$

यह सिद्ध हुआ है इसमें दहिने पक्ष का रूप य घातवृद्धि में बना कर उसे $\text{त}_1+२\text{त}_2\frac{\text{य}}{२}+३\text{त}_3\frac{\text{य}^2}{२\cdot३}+\cdots\cdots$

इसके समान कर य के समानघातों के गुणकों का तुल्य मानने से भी त_1, त_2 इत्यादि व्यक्त हो जायँगे।

(१५) $\text{स}=\text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{ज्या}^{-1}\text{कय}}$ इसमें य के घातवृद्धि में स का मान ले आना है, यहाँ मानो कि $\text{ज्या}^{-1}\text{कय}=\text{र}$

$$\text{तो }\text{स}=\text{इ}^{\text{अ}\cdot\text{र}},\quad \therefore\frac{\text{तास}}{\text{तार}}=\text{अ}\cdot\text{इ}^{\text{अर}} \qquad \text{ज्यार}=\text{कय},\quad \therefore\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}=\frac{\text{क}}{\sqrt{१-\text{क}^2\text{य}^2}}$$

और, $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}=\frac{\text{अ}\cdot\text{क}\cdot\text{इ}^{\text{अर}}}{\sqrt{१-\text{क}^2\text{य}^2}}$।

या, $\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}=\frac{\text{अ}\cdot\text{क}\cdot\text{स}}{\sqrt{१-\text{क}^2\text{य}^2}}$

परन्तु म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से,

$$स = त + त_{१}\cdot य + त_{२}\cdot\frac{य^{२}}{१\cdot२} + त_{३}\cdot\frac{य^{3}}{२\cdot३} + \cdots\cdots$$

$$\frac{ताम}{ताय} = त_{१} + २\, त_{२}\cdot\frac{य^{3}}{१\cdot२} + ३\, त_{३}\cdot\frac{य^{२}}{२\cdot३} + \cdots$$

और द्वियुक्पदसिद्धान्त से,

$$= (१ - क^{२}\cdot य^{२})^{-\frac{१}{२}} = १ + \frac{१}{२}क^{२}\cdot य^{२} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}क^{४}\cdot य^{४}$$

$$+ \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६}\cdot क^{६}\cdot य^{६} + \cdots\cdots$$

इसलिये

$$\frac{अ\cdot क\cdot म}{\sqrt{१-क^{२}\cdot य^{२}}} = अक\Big\{त + त_{१}\cdot य + त_{२}\cdot\frac{य^{२}}{१\cdot२} + त_{३}\frac{य^{3}}{२\cdot३} + \cdots$$

$$+ त\cdot\frac{क^{२}\cdot य^{२}}{२} + त_{१}\cdot क^{२}\cdot\frac{य^{3}}{१\cdot२} + \cdots\cdots\Big\}$$

इन पर से,

$$त_{१} + २\, त_{२}\frac{य}{२} + ३\, त_{३}\cdot\frac{य^{२}}{२\cdot३} + ४\, त_{४}\cdot\frac{य^{3}}{२\cdot३\cdot४} + \cdots\cdots$$

$$= अ\cdot क\Big\{त + त_{१}\cdot य + \frac{य^{२}}{२}(त_{२} + क^{२}\cdot त) + \frac{य^{3}}{२\cdot३}(त_{३} + ३\, त_{१}\cdot क^{२}) + \cdots\Big\}$$

य के समानघातों का गुणक समान करने से,

$अकत = त_{१}$, $अकत_{१} = त_{२}$, $त_{३} = अक\,(त_{२} + क^{२}\cdot त)$

ऐसा हुआ। परन्तु प्रथम समीकरण में यदि $य = ०$

तो $त = १$ इस लिये $त_{१} = अक$। $अ^{२}क^{२} = त_{२}$।

$त_{३} = अक\,(\,अ^{२}क^{२} + क^{२}\,)$।

$त_{४} = (त_{3} + ३\, त_{१}क^{२})\, अक = अक\,(अ^{3}\cdot क^{3} + ४\, अ\cdot क^{3})$

$= अ^{२}\cdot क^{४}\,(\,अ^{२} + २^{२}\,)$, इत्यादि

इनका उत्थापन म्याक्लारिन के सिद्धान्त में देने से,

$$स = १ + अ \cdot क \cdot य + \frac{अ^२ \cdot क^२}{१} \cdot \frac{य^२}{२} + अ \cdot क^3 (अ^२ + १) \cdot \frac{य^3}{२ \cdot ३}$$

$$+ अ^२ \cdot क^४ (अ^२ + २^२) \cdot \frac{य^४}{\underline{|४}} + अ \cdot क^५ (अ^२ + १)(अ^२ + ३^२) \cdot \frac{य^५}{\underline{|५}} + \cdots$$

$$= १ + अ \cdot \frac{क \cdot य}{१} + अ^२ \cdot \frac{क^२ \cdot य^२}{१ \cdot २} + अ . (अ^२ + १) \cdot \frac{क^3 \cdot य^3}{२ \cdot ३}$$

$$+ अ^२ (अ^२ + २^२) \cdot \frac{क^४ \cdot य^४}{\underline{|४}} + अ (अ^२ + १)(अ^२ + ३^२) \cdot \frac{क^५ \cdot य^५}{\underline{|५}} + \cdot$$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि प्रत्येक पद में, क·य के घातों का गुणकाङ्क $गु_{०}, गु_{२}, गु_{3}$ इत्यादि मानो जहाँ क·य के शून्य घात का गुणक $गु_{०} = १$ है

तो, $गु_{न+२} = \frac{अ^२ + (न - १)^२}{१} \cdot गु_{न}$ ऐसा सिद्ध होता है।

इन गुणकों को और प्रकार से भी जान सकते हो।

(१६) $स = ज्या\,(म \cdot ज्या^{-१} य)$, इसका मान य के घातवृद्धि में लाना है।

मानो $र = ज्या^{-१} य$, तो $\frac{तास}{तार} = म \cdot कोज्यामर$

परन्तु $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{\sqrt{१ - य^२}} \therefore \frac{तास}{ताय} = \frac{म \cdot कोज्या (म \cdot ज्या^{-१} य)}{\sqrt{१ - य^२}}$।

$$\frac{ता^२स}{ताय^२} = \frac{-म^२ \cdot ज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) + य \cdot म \cdot कोज्या (म \cdot ज्या^{-१} य)(१ - य^२)^{-\frac{१}{२}}}{१ - य^२}$$

$$\therefore (१ - य^२) \frac{ता^२स}{ताय^२}$$

$$= -म^२ \cdot ज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) + य \cdot म \cdot कोज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) (१ - य^२)^{-\frac{१}{२}}$$

और $\frac{तास}{ताय} य = य \cdot म \cdot कोज्या (म \cdot ज्या^{-१} य) (१ - य^२)^{-\frac{१}{२}}$ दोनों का अन्तर करने से,

$$य\cdot\frac{तास}{ताय} - (१-य^२)\frac{ता^२स}{ताय^२} = म^२\cdot ज्या\ (म\cdot ज्या^{-१}य) = म^२\cdot स ।$$

परन्तु म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से,

$$स = त + त_१\cdot य + त_२\cdot\frac{य^२}{२} + त_३\cdot\frac{य^३}{२\cdot३} + त_४\cdot\frac{य^४}{२\cdot३\cdot४} + \cdots\cdots$$

$$\frac{तास}{ताय} = त_१ + २त_२\cdot\frac{य}{२} + ३त_३\cdot\frac{य^२}{२\cdot३} + ४त_४\cdot\frac{य^३}{२\cdot३\cdot४} + \cdots\cdots$$

$$\frac{ता^२स}{ताय^२} = त_२ + त_३य + त_४\cdot\frac{य^२}{२} + त_५\cdot\frac{य^३}{२\cdot३} + \cdots\cdots$$

इन पर से,

$$य\cdot\frac{तास}{ताय} = त_१य + २त_२\cdot\frac{य^२}{२} + ३त_३\cdot\frac{य^३}{२\cdot३} + \cdots\cdots$$

$$(१-य^२)\frac{ता^२स}{ताय^२} = त_२ + त_३य + त_४\cdot\frac{य^२}{२} + त_५\cdot\frac{य^३}{२\cdot३} + \cdots\cdots - त_२य^२ - त_३य^३ - त_४\frac{य^४}{२} - \cdots$$

$$= त_२ + त_३य + \frac{य^२}{२}(त_४ - २त_२) + \frac{य^३}{२\cdot३}(त_५ - ६त_३) + \cdots$$ और

$$य\cdot\frac{तास}{ताय} - (१-य^२)\frac{ता^२स}{ताय^२} = -त_२ + य(त_१-त_३) + \frac{य^२}{२}(४त_२-त_४) + \cdots$$

इस लिये, $म^२\cdot त + म^२\cdot त_१य + म^२\cdot त_२\frac{य^२}{२} + म^२\cdot त_३\cdot\frac{य^३}{२\cdot३} + \cdots\cdots$

$$= म^२\cdot स = -त_२ + (त_१-त_३)य + (४त_२-त_४)\frac{य^२}{२} + (९त_३-त_५)\frac{य^३}{२\cdot३}\cdots$$

य के समानघातों का गुणक समान करने से,

$-म^२\cdot त = त_२,\ म^२\cdot त_१ = त_१ - त_३\ \therefore\ त_३ = (१-म^२)\,त_१$ ।

और $म^२\cdot त_२ = ४त_२ - त_४\ \therefore\ त_४ = (४-म^२)\,त_२$ ।

$म^२\cdot त_३ = ९त_३ - त_५\ \therefore\ त_५ = (९-म^२)\,त_३$ ।

सामान्यतः $त_{न+२} = (न^२ - म^२)\,त_न$

परन्तु पूर्वसमीकरण में यदि $य=०$ तो $स=०=त$

इस लिये, $त_2=०$ और $\frac{ताम}{ताय}$ इस का मान $=म$, यदि $य=०$

अर्थात् $त_1=म$,

ऊपर $त_1$, $त_2$ इत्यादि मानों को देखने से स्पष्ट है कि जब $त_2=०$ तो $त_2$, $त_4$, $त_6$ इत्यादि सब शून्य के तुल्य होंगे, और $त_1=म$ इस लिये, केवल $त_3$, $त_5$ इत्यादि के मान $त_{न+२}=(न^2-म^2)त_न$ इस पर से लाकर म्याक्लारिन् के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$स=ज्या(म\cdot ज्या^{-1}य)$

$$=म\cdot य+म(१^2-म^2)\frac{य^3}{\underline{|३}}+\frac{म(१^2-म^2)(३^2-म^2)}{\underline{|५}}य^5+\cdots\cdots(१)$$

इसी प्रकार यदि $स=कोज्या(म\cdot ज्या^{-1}य)$ तो $स=कोज्या(म\cdot ज्या^{-1}य)$

$$=१-\frac{म^2}{\underline{|२}}\cdot य^2-\frac{म^2(२^2-म^2)}{\underline{|४}}य^4-\frac{म^2(२^2-म^2)(४^2-म^2)}{\underline{|६}}य^6-\cdots\cdot(२)$$

(१) समीकरण के वर्ग को एक में घटाकर बीजगणित की रीति से मूल लेने से भी (२) समीकरण उत्पन्न हो सकता है।

(१७) $\frac{य}{इ^य-१}=स$, इसे य के घातवृद्धि में ले आना चाहिये।

यहाँ छठवें उदाहरण के (२) समीकरण से,

$$इ^य=१+य+\frac{य^2}{२}+\frac{य^3}{\underline{|३}}+\frac{य^4}{\underline{|४}}+\cdots$$ इस लिये,

$$\frac{य}{इ^य-१}=\frac{१}{१+\frac{य}{२}+\frac{य^2}{\underline{|३}}+\frac{य^3}{\underline{|४}}+\frac{य^4}{\underline{|५}}+\cdots\cdots}$$

केवल भागहार से अब सिद्ध हो जायगा कि,

$$\frac{य}{इ^य-१}=१-\frac{य}{२}+\frac{य^2}{१२}-\frac{य^4}{७२०}+\cdots\cdots$$

$$=१-\frac{य}{२}+\frac{१}{६}\cdot\frac{य^२}{२}-\frac{१}{३०}\cdot\frac{य^४}{\lfloor ४}+\cdots\cdots$$

$$=१-\frac{य}{२}+व_१\cdot\frac{य^२}{\lfloor २}-व_३\cdot\frac{य^४}{\lfloor ४}+व_५\frac{य^६}{\lfloor ६}-व_७\cdot\frac{य^८}{\lfloor ८}+\cdots$$

यहाँ $व_१=\frac{१}{६}$, $व_३=\frac{१}{३०}$, $व_५=\frac{१}{४२}$, $व_७=\frac{१}{३०}$

और $व_९=\frac{५}{६६}$ इत्यादि सिद्ध होते हैं।

इस $व_१$, $व_३$ इत्यादि के मान को वर्नेली (Bernoulli) की संख्या कहते हैं क्योंकि सबसे पहले इन संख्याओं को जेमस वर्नेली (James Bernoulli) साहब ने प्रकाश किया था इस लिये उन के आदरार्थ उन के नाम के साथ ये संख्यायें बोली जाती हैं। यद्यपि इन संख्याओं का परस्पर सम्बन्ध अभी नहीं देख पड़ता है तथापि इनसे बहुत उदाहरणों की सिद्धि लाघव से हो जाती है।

$\frac{य}{इ^य-१}=फ(य)$ यदि कल्पना करो तो स्पष्ट है कि $फ(य)-फ(-य)$ इसमें केवल य के जितने विषमघात होंगे उनके दूने तुल्य शेष बचेंगे क्योंकि समघात तो दोनों समीकरणों में धन ही होगा इस लिये घटाने में सब उड़ जायँगे, परन्तु जब $फ(य)=\frac{य}{इ^य-१}$

$$इस लिये फ(-य)=-\frac{य}{इ^{-य}-१}=-\frac{य\cdot इ^य}{१-इ^य}=\frac{य\cdot इ^य}{इ^य-१}$$

$$और, फ(य)-फ(-य)=-य\left(\frac{इ^य-१}{इ^य-१}\right)=-य$$

इस से भी सिद्ध होता है कि $\frac{य}{इ^य-१}$ इसके मान में य का एक घात छोड़ और कोई विषमघात नहीं है।

जब, $\frac{य}{इ^य-१}=फ(य)$, तो $इ^य\cdot फ(य)=य+फ(य)\cdots\cdots(१)।$

(१) इस समीकरण में दोनों पक्षों का तात्कालिकसम्बन्धपरम्परा निकाल म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से भी $व_1$, $व_3$ इत्यादि के मान प्रकट हो सकते हैं। इस प्रकार म्याक्लारिन् के सिद्धान्त के बल से अनेक प्रकार के चमत्कृत नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं।

इन सत्रहों उदाहरणों पर विद्यार्थियों को चाहिये कि विशेष ध्यान दें क्योंकि इनके बल से अनेक उदाहरण बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं।

२१। यदि फ (य+च) यह य+च का फल हो तो य को चल, और च को स्थिर मान इसका जो तात्कालिकसम्बन्ध होगा वही तात्कालिकसम्बन्ध च को चल, और य को स्थिर मानने से भी सिद्ध होता है क्योंकि,

यदि य+च=ल तो प्रथमस्थिति में अर्थात् य को चल और च को स्थिरमान,

$$\frac{ताफ\,(य+च)}{ताय}=\frac{ताफ\,(ल)}{ताल}\cdot\frac{ताल}{ताय}=\frac{ताफ\,(ल)}{ताल}=फ^{।}(ल)$$

क्योंकि, $य+च=ल,\therefore\ \frac{ताल}{ताय}=१$।

और दूसरी स्थिति में अर्थात् य को स्थिर और च को चल मान

$$\frac{ताफ\,(य+च)}{ताच}=\frac{ताफ\,(ल)}{ताल}\cdot\frac{ताल}{ताच}=\frac{ताफ\,(ल)}{ताल}=फ^{।}(ल)$$

क्योंकि, यहाँ भी $\frac{ताल}{ताच}=१$।

२२। फ (य+च) का मान च के घातवृद्धि में जानना है। कल्पना करो कि,

$$फ\,(य+च)=अ+अ_1च+अ_2च^2+अ_3च^3+\cdots\cdots \qquad (१)$$

जहाँ अ, $अ_1$ इत्यादि च के अपेक्षा स्वतन्त्र हैं।

$$तब,\ \frac{ताफ\,(य+च)}{ताय}=\frac{ताअ}{ताय}+\frac{ताअ_1}{ताय}च+\frac{ताअ_2}{ताय}\cdot च^2+\cdots\cdots \qquad (२)$$

$$और\ \frac{ताफ\,(य+च)}{ताच}=अ_1+२अ_2च+३अ_3च^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (३)$$

परन्तु २१ प्रक्रम से दूसरा और तीसरा सरूपसमीकरण अवश्य परस्पर तुल्य होंगे इस लिये च के समानघातों के गुणकों को परस्पर तुल्य करने से,

$$अ_1 = \frac{ताअ}{ताय},\ अ_2 = \frac{ताअ_1}{२ताय} = \frac{१}{१\cdot२} \cdot \frac{ता^2अ}{ताय^2}।$$

$$अ_3 = \frac{१}{३} \cdot \frac{ताअ_2}{ताय} = \frac{१}{१\cdot२\cdot३} \cdot \frac{ता^3अ}{ताय^3}, \cdots\cdots$$

और च का मान शून्य मानने से (१) समीकरण में फ (य) = अ इन पर से (१) समीकरण का रूप

$$फ(य+च) = फ(य) + च\cdot फ'(य) + \frac{च^2}{१\cdot२} फ''(य) + \frac{च^3}{१\cdot२\cdot३} फ'''(य)$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{च^न}{\underline{|न}} \cdot \frac{ता^न फ(य)}{ताय^न} \cdots\cdots \quad (४)$$

२३। (४) समीकरण में जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उसे टेलर (Taylor) साहब या डाक्टर ब्रूक टेलर (Dr. Brook Taylor) साहब ने सन १७१५ में प्रकाश किया था इसी लिये उनके आदरार्थ इसे * टेलर का सिद्धान्त कहते हैं।

---

* टेलर के सिद्धान्त की उपपत्ति मिस्टर होमरशम काक्स् साहब (Mr. Homersham cox) की की हुयी। कल्पना करो कि फ (य) का मान शून्य के समान होता है यदि य = अ और य = क तो फ (य) अवश्य य के अ और क मान के बीच में घटता बढ़ता रहेगा अर्थात् कुछ मान तक बढ़ेगा फिर आगे घटेगा इस दशा में फ' (य) अवश्य य के अ और क के बीच किसी मान में शून्य होगा क्योंकि यदि ऐसा न मानो तो कल्पना करो कि फ' (य) यह घटता या बढ़ता ही चला जाता है य के अ और क मान तक इस लिये फिर फ (य) भी य के अ मान से ले क मान तक घटता ही या बढ़ता ही चला जायगा इस लिये फ (य) का मान य के क मान में कभी शून्य के समान न होगा और कल्पना तो ऐसा किया है कि फ (य) य के क मान में भी शून्य के समान है इस लिये यह असम्भव है तब यही सिद्ध होता है कि फ' (य) अवश्य य के अ और क मान के बीच किसी मान में शून्य होगा इसी प्रकार आगे भी सिद्ध

कर सकते हो कि $\text{फ}''(\text{य})$ भी य के अ और क_1 मान के बीच किसी मान में शून्य होगा यहाँ जिस मान में $\text{फ}'(\text{य})$ शून्य होता है उस मान का मान क_1 है। इसी प्रकार $\text{फ}'''(\text{य})$ इत्यादि भी शून्य के समान अ और क मान के बीच में किसी मान में होंगे यह भी सिद्ध हो जायगा।

अब देखो कि,

$$\text{फ}(\text{अ}+\text{य}) - \text{फ}(\text{अ}) - \text{य}\text{फ}'(\text{अ}) - \frac{\text{य}^{२}}{\underline{|२}}\text{फ}''(\text{अ}) - \cdots - \frac{\text{य}^{(\text{न})}}{\underline{|\text{न}}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{अ}) - \frac{\text{ऋ}\cdot\text{य}^{\text{न}+१}}{\underline{|\text{न}+१}} \cdots \quad (१)$$

यह शून्य के तुल्य होता है, यदि य = च और ऋ =

$$\frac{\underline{|\text{न}+१}}{\text{च}^{\text{न}+१}}\Big\{\text{फ}(\text{अ}+\text{च}) - \text{फ}(\text{अ}) - \text{च}\text{फ}'(\text{अ}) - \frac{\text{च}^{२}}{\underline{|२}}\text{फ}''(\text{अ}) - \cdots - \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{अ})\cdots\Big\} \quad (२)$$

मानो कि, ऋ का यही मान है जिसे हम स्पष्ट देखते हैं कि य के अपेक्षा स्वतन्त्र है।

(१) समीकरण, तब भी शून्य होता है यदि य = ० इस लिये य के ० और च मान के बीच में (१) समीकरण अवश्य घटता बढ़ता है इस लिये (१) समीकरण का प्रथम सम्बन्ध—

$$\text{यह}, \text{फ}'(\text{अ}+\text{य}) - \text{फ}'(\text{अ}) - \text{य}\text{फ}''(\text{अ}) - \cdots - \frac{\text{य}^{\text{न}-१}}{\underline{|\text{न}-१}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{अ}) - \frac{\text{य}^{\text{न}}\cdot\text{ऋ}}{\underline{|\text{न}}}$$

भी शून्य होगा यदि $\text{य} = \text{य}_1, \angle \text{च}$ और यदि य = ०। इसी प्रकार वारवार सम्बन्ध निकालने से,

$\text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{अ}+\text{य}) - \text{ऋ}$ यह भी य के किसी मान में जो कि च से अल्प है शून्य होगा। मानो कि ऐसा य का मान = पच है, यहाँ प कोई भिन्न रूपात्मकसंख्या है, तब पक्षान्तर से, $\text{ऋ} = \text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{अ}+\text{पच})$

(२) समीकरण से और अ के स्थान में य का उत्थापन देने से,

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) = \text{फ}(\text{य}) + \text{च}\cdot\text{फ}'(\text{य}) + \frac{\text{च}^{२}}{\underline{|२}}\text{फ}''(\text{य}) + \cdots + \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\underline{|\text{न}}}\text{फ}^{(\text{न})}(\text{य}) + \frac{\text{च}^{\text{न}+१}}{\underline{|\text{न}+१}}\text{फ}^{(\text{न}+१)}(\text{य}+\text{पच})$$

अब इस पर से न का मान अनन्त मानने से टेलर का सिद्धान्त उपपन्न हो जायगा यदि कोई सम्बन्ध शून्य के तुल्य न हो तो।

"चलनकलन" के विस्तार का मूल यही टेलर का सिद्धान्त है इस के बल से म्याक्लारिन् का भी सिद्धान्त उत्पन्न हो सकता है केवल २२ वें प्रक्रम के (४) समीकरण में य=० कल्पना कर, च के स्थान में य का उत्थापन दे न का मान अनन्त मानना पड़ेगा।

म्याक्लारिन् साहब ने म्याक्लारिन् सिद्धान्त को सन् १७४२ में प्रकाश किया था परन्तु इसे स्टर्लिङ्ग (Stirling) साहब ने भी उसी सन् के लगभग में प्रकाश किया इस लिये कभी कभी म्याक्लारिन् के सिद्धान्त को स्टर्लिङ्ग का भी सिद्धान्त कहते हैं।

२४। इस प्रक्रम में टेलर के सिद्धान्त का अच्छी भाँति बोध होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) यदि फ (य+च)=ज्या (य+च) तो टेलर के सिद्धान्त के पदों के जानने के लिये,

$$\text{फ (य)}=\text{ज्याय},\quad \text{फ}^{'}\text{ (य)}=\text{कोज्याय}$$

$$\text{फ}^{''}\text{ (य)}=-\text{ज्याय},\quad \text{फ}^{'''}\text{ (य)}=-\text{कोज्याय।}$$

इन सब का उत्थापन टेलर के सिद्धान्त में देने से,

$$\text{ज्या (य+च)}=\text{ज्याय}+\text{कोज्याय}\cdot\text{च}-\text{ज्याय}\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}-\text{कोज्याय}\ \frac{\text{च}^{३}}{१\cdot२\cdot३}$$
$$+\text{ज्याय}\cdot\frac{\text{च}^{४}}{\underline{|४}}+\text{कोज्याय}\frac{\text{च}^{५}}{\underline{|५}}-\cdots\cdots\cdots\cdots(१)$$

इसी प्रकार कोज्या (य+च) का मान भी टेलर के सिद्धान्त से यदि ले आओ तो,

$$\text{कोज्या (य+च)}=\text{कोज्याय}-\text{ज्याय}\cdot\frac{\text{च}}{१}-\text{कोज्याय}\cdot\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}$$
$$+\text{ज्याय}\cdot\frac{\text{च}^{३}}{१\cdot२\cdot३}+\text{कोज्याय}\cdot\frac{\text{च}^{४}}{\underline{|४}}-\cdots(२)\ \text{ऐसा होगा।}$$

यहाँ दोनों अर्थात् प्रथम और दूसरे समीकरण में यदि य=० तो,

$$\text{ज्याच}=\text{च}-\frac{\text{च}^{३}}{२\cdot३}+\frac{\text{च}^{५}}{\underline{|५}}-\frac{\text{च}^{७}}{\underline{|७}}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{कोज्याच} = १ - \frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२} + \frac{\text{च}^{४}}{\underline{|४}} - \frac{\text{च}^{६}}{\underline{|६}} + \cdots\cdots$$

ठीक म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से भी ऐसा ही उत्पन्न होता है (म्याक्लारिन् के सिद्धान्तसम्बन्धि दूसरा उदाहरण देखो)।

(२) फ (य+च)=ला (य+च) इसमें फ (य+च) का मान च के घातवृद्धि में ले आना है।

यहाँ फ (य)=लाय

$\text{फ}'(\text{य}) = \frac{१}{\text{य}} = \text{य}^{-१}$, $\text{फ}''(\text{य}) = -\text{य}^{-२}$।

$\text{फ}'''(\text{य}) = २\text{य}^{-३}$, $\text{फ}''''(\text{य}) = -२\cdot३\cdot\text{य}^{-४}$।

इन का टेलर के सिद्धान्त में उत्थापन देने से,

$$\text{ला}(\text{य}+\text{च}) = \text{लाय} + \frac{\text{च}}{\text{य}} - \frac{१}{\text{य}^{२}}\cdot\frac{\text{च}^{२}}{२} + \frac{१}{\text{य}^{३}}\cdot\frac{\text{च}^{३}}{३} - \frac{१}{\text{य}^{४}}\cdot\frac{\text{च}^{४}}{४} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

(१) इसी समीकरण में यदि य=१ तो,

लाय=० इस लिये प्रथम समीकरण का रूप,

$$\text{ला}(१+\text{च}) = \text{च} - \frac{\text{च}^{२}}{२} + \frac{\text{च}^{३}}{३} - \frac{\text{च}^{४}}{४} + \cdots\cdots$$

इसी प्रकार टेलर के सिद्धान्त से द्वियुक्पदसिद्धान्त भी बड़े लाघव से उपपन्न हो सकता है।

(३) फ (य) · फ (च)=फ (य+च)+फ (य−च)

इसमें फ (य) का रूप जानना है।

यहाँ टेलर के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि,

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च}) + \text{फ}(\text{य}-\text{च}) = २\left\{\text{फ}(\text{य}) + \text{फ}''(\text{य})\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२} + \text{फ}''''(\text{य})\frac{\text{च}^{४}}{\underline{|४}} + \cdots\right\}$$

$$= \text{फ}(\text{य})\cdot\text{फ}(\text{च}),$$

दोनों पक्षों में, फ (य) का भाग देने से,

$$फ(च)=२\left\{१+\frac{१}{फ(य)}\cdot फ''(य)\frac{च^२}{१\cdot२}+\frac{१}{फ(य)}\cdot फ''''(य)\frac{च^४}{\underline{|४}}+\cdots\right\}\cdots(१)$$

अब यहाँ यदि $\frac{फ''(य)}{फ(य)}=-र^२$ तो $फ''(य)=-र^२\cdot फ(य)$

इस पर से $फ''''(य)=-र^२\cdot फ''(य)=र^४\cdot फ(य)$ इत्यादि

इन का उत्थापन (१) इसमें देने से,

$$फ(च)=२\left\{१-\frac{र^२\cdot च^२}{२}+\frac{र^४\cdot च^४}{\underline{|४}}-\frac{र^६\cdot च^६}{\underline{|६}}+\cdots\right\}=२कोज्या(र\cdot च)\cdot$$

और इसी समीकरण में च के स्थान में य का उत्थापन देने से,

फ (य) = २ कोज्या (र·य) और त्रिकोणमिति से भी स्पष्ट है कि २कोज्या (र·च) · २ कोज्या (र·य) = फ(य + च) + फ(य − च)

= २ कोज्या (रय + रच) + २ कोज्या(रय − रच)

इस लिये फ (य) का रूप २कोज्या (र·य) यही सिद्ध हुआ।

इस प्रकार से सैकड़ों उदाहरण इस टेलर के और म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से उत्पन्न हो सकते हैं, बहुत लिखना व्यर्थ है। विद्यार्थियों को चाहिये कि ऊपर लिखे हुए उदाहरणों का अच्छी भाँति अभ्यास कर उन के बल से और और भी उदाहरण अपने मन से सोचें।

हमारे यहाँ संस्कृत ज्यौतिषसिद्धान्त ग्रन्थों में जो कहीं कहीं असकृद्विधि लिखे हैं वे सब प्रायः टेलर और म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से उत्पन्न हो सकते हैं।

२५। टेलर के सिद्धान्त के बल से बहुधा आसन्नमान से समी-*करणों में अव्यक्तराशि का मान भी निकल सकता है, क्योंकि जब स्पष्ट* है कि किसी समीकरण का रूप फ (य) = ० ऐसा है तब मानो कि अट-कल से एक य का मान = क और वास्तव में य = (क + च) इसलिये फ (य) = फ (क + च) = ० अब इसका मान टेलर के सिद्धान्त से,

$$फ(क+च)=०=फ(क)+फ'(क)\frac{च}{१}+फ''(क)\frac{च^२}{१\cdot२}+\cdots(१)$$

(१) इसमें यदि च का मान अति अल्प मानो तो च का दूसरा घात छोड़ देने से,

$$० = फ(क) + फ'(क)\cdot च$$

$$\therefore च = -\frac{फ(क)}{फ'(क)} \text{ इस पर से } य = क - \frac{फ(क)}{फ'(क)} \cdots\cdots \qquad (२)$$

पुनः (२) इसमें जो य का मान आया है उस का क के स्थान में उत्थापन देने से बहुत ठीक य का मान व्यवहारार्थ आजायगा और यदि पुनः पुनः क के मान में उत्थापन देकर य का मान लाओ अर्थात् असकृद्विधि करो तो बहुत ही सूक्ष्म य का मान निकल सकता है।

जैसे,

(१) $य^४ - ३य^२ + २य - ७\frac{१}{२} = ०$ इसमें य का मान जानना है।

यहाँ पहले अटकल से य = २ कल्पना किया तो, २४ वें प्रक्रम से क = २ और २५ वें प्रक्रम के (२) समीकरण से,

$$\left.\begin{aligned} फ(य) &= य^४ - ३य^२ + २य - ७\frac{१}{२} \\ \frac{ताफ(य)}{ताय} &= फ'(य) = ४य^३ - ६य + २ \end{aligned}\right\}$$ इनमें य के स्थान में क का उत्थापन देने से क्रम से दोनों पक्षों के मान,

$$फ(क) = १६ - ३\times४ + २\times२ - ७\frac{१}{२} = \frac{१}{२}$$

$$फ'(क) = ४\times८ - ६\times२ + २ \qquad = २२$$

$$\therefore च = -\frac{फ(क)}{फ'(क)} = -\frac{१}{४४}$$

और $य = क - \frac{फ(क)}{फ'(क)} = २ - \frac{१}{४४} = १\frac{४३}{४४}$ यही आसन्नमान से उत्तर हुआ।

(२) $य^४ - २य^२ - २५ = ०$ इस में य का मान क्या है?

यहां अटकल से पहले य = २ कल्पना कर

$\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{५} - २\text{य}^{२} - २५ = -१ \text{ यदि फ}(\text{य}) = \text{फ}(२)$

$\text{फ}'(\text{य}) = ५\text{य}^{४} - ४\text{य} \qquad = ७२ \text{ यदि फ}'(\text{य}) = \text{फ}'(२)$

$$\therefore \text{च} = -\frac{\text{फ}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})} = \frac{१}{७२} \text{ और } \text{य} = २ + \frac{१}{७२} \text{ यही उत्तर हुआ ।}$$

यदि इस य के मान पर से दूसरा य का मान ले आओ तो बहुत ही सूक्ष्म होगा ।

(३) दो पुरुष साथ हो परदेश को चले, पहला प्रतिदिन दश दश कोश चलता था और दूसरा पहले दिन एक कोश चल के अपने एक मित्र के घर पर ठहरा और (उस के अनेक मित्र थे जिन का घर एक ही मार्ग में क्रम से २, $२^{२}$, $२^{३}$ इत्यादि द्विगुणोत्तर अन्तर पर थे) दूसरे दिन दूसरे मित्र के घर आ ठहर गया यों प्रत्येक मित्रों के घर पर ठहरता हुआ चला तो बताओ कि उन दोनों पुरुषों से भेंट पुनः कितने दिनों पर होगी ?

यहां प्रश्न की बोली से,

$१०\text{ य} = २^{\text{य}} - १$ ऐसा समीकरण होगा। और यदि य=५, तो, दोनों का मान ५०, ३१ इस लिये वास्तव य के मान से ५ यह अल्प है पुनः यदि य= ६ तो दोनों का मान, ६०, ६३ इस लिये वास्तव य के मान से ६ यह अधिक है अटकल से कल्पना करो कि य=६ ।

अब $\text{फ}(\text{य}) = ० = २^{\text{य}} - १०\text{य} - १ = ६४ - ६० - १,$

यदि $\text{फ}(\text{य}) = \text{फ}'(६)$ । और $\text{फ}'(\text{य}) = २^{\text{य}} \text{ला}२ - १० = ६४ \times {}^{\cdot}६९३० - १०$ यदि $\text{फ}(\text{य}) = \text{फ}'(६)$ । यहां ला २ अर्थात् इ आधार में दो का लघुरिक्थ = ·६९३० यह दो का आसन्न लघुरिक्थ लेकर पूर्व पक्ष में उत्थापन देने से $\text{फ}(६) = ३$ । $\text{फ}'(६) = ३४{}^{\cdot}३३९$

$$\therefore \text{च} = -\frac{\text{फ}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})} = \frac{-३}{३४{}^{\cdot}३३९} = -{}^{\cdot}०९ \text{ स्वल्पान्तर से,}$$

और $\text{य} = \text{क} + \text{च} = ६ - {}^{\cdot}०९ = ५{}^{\cdot}९१$ यही उत्तर हुआ ।

यदि पुनः ४·९१ इस मान पर से य का दूसरा मान ले आवो तो बहुत ही सूक्ष्म होगा ।

२६ । टेलर के सिद्धान्त में, यदि य=ह+र कल्पना करो तो फ(य)=फ (ह+र), और फ (ह+र) इस का मान,

$$\text{फ(य)} = \text{फ (ह)} + \text{फ}'\text{(ह)}\frac{\text{र}}{१} + \text{फ}''\text{(ह)}\frac{\text{र}^२}{१\cdot२} + \text{फ}'''\text{(ह)}\frac{\text{र}^३}{२\cdot३} + \cdots(१)$$

ऐसा होगा।

यहाँ स्पष्ट है कि य के स्थान में यदि ह का उत्थापन दें तो फ (ह) का मान विदित हो जायगा पुनः फ (ह) के मान से फ$'$ (ह), फ$''$ (ह) इत्यादि मान भी प्रकट हो जायँगे।

(१) समीकरण में फ$'$ (ह)$\frac{\text{र}}{१}$, फ$''$ (ह)$\frac{\text{र}^२}{१\cdot२}$ इत्यादि में यदि किसी एक पद को उड़ाना हो तो फ (ह) पर से उसका मान निकाल उसे शून्य के तुल्य करने से अवश्य एक ऐसा ह का मान आवेगा जिस पर से कि उस पद का मान उड़ जायगा ।

जैसे, कल्पना करो कि ९ य^३+४५ य^२+७५ य − १०=० यह एक समीकरण है तो (१) से स्पष्ट है कि,

फ (ह)=९ ह^३+४५ ह^२+७५ ह − १० ।

इस लिये,

फ$'$ (ह)=२७ ह^२+९० ह+७५ ।

फ$''$ (ह)=५४ ह+९० ।

फ$'''$ (ह)=५४ ।

फ$''''$ (ह)=० ।

$$\text{और फ (य)} = \text{फ(ह)} + \text{फ}'\text{(ह)}\frac{\text{र}}{१} + \text{फ}''\text{(ह)}\frac{\text{र}^२}{१\cdot२} + \text{फ}'''\text{(ह)}\frac{\text{र}^३}{२\cdot३} + \cdots$$

इस में मानो कि दूसरा घात र का अर्थात् फ$''$ (ह) इसे उड़ाना है तो फ$''$ (ह)=०=५४ ह+९० ऐसा होगा,

इस लिये $इ = -\frac{५}{२}$ अब इस पर से फ (इ), $फ^{।}$ (इ) इत्यादि में चाहो जिस का मान ला सकते हो।

टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार।

२७। कभी कभी टेलर के सिद्धान्त का (य के विशेष फलों में) व्यभिचार होता है क्योंकि टेलर के सिद्धान्त से फ (य+च) इस का मान सर्वदा च के अभिन्न और धन घात में आता है और सम्भव है कि ऐसा फ (य) हो जिस पर से फ (य+च) इस के मान में च का घात भिन्न वा ऋण हो।

जैसे यदि $फ (य) = (य - क)^{\frac{म}{न}}$ तो फ (य+च)

$= (य - क + च)^{\frac{म}{न}}$ यहाँ स्पष्ट है कि यदि य=क

तो $फ (य+च) = च^{\frac{म}{न}}$।

परन्तु जब, $फ (य) = (य - क)^{\frac{म}{न}}$

तो $फ^{।} (य) = \frac{म}{न} (य - क)^{\frac{म}{न} - १}$

$फ^{॥}(य) = \frac{म}{न}\left(\frac{म}{न} - १\right) (य - क)^{\frac{म}{न} - २}$

अब टेलर के सिद्धान्त से,

$$फ (य+च) = (य - क)^{\frac{म}{न}} + \frac{म}{न} (य - क)^{\frac{म}{न} - १} . च + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{म}{न}\left(\frac{म}{न} - १\right) \ldots\ldots (य - क)^{\frac{म}{न} - प}$$

यहाँ जब $\frac{म}{न} < प > प - १$ होगा तब सब पदों का मान अनन्त के समान होगा य=क ऐसा मानने से इस लिये ऐसी दशा में टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार हुआ।

इसी प्रकार यदि $फ(य) = \frac{म}{(य-क)^{न}}$

तो $फ(य+च) = \frac{म}{(य-क+च)^{न}}$ यहाँ यदि $य = क$

तो $फ(य+च) = \frac{म}{च^{न}} = म \cdot च^{-न}$ परन्तु यदि टेलर के सिद्धान्त से यहाँ $फ(य+च)$ का मान लावो और उस में $य = क$ के मानो तो प्रत्येक पद अनन्त के तुल्य होगा ।

इस लिये जब $फ(य)$ का मान शुद्धकरणी में हो वा अनन्त के तुल्य हो किसी निश्चित य के मान में तो टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार होता है ।

२८ । इस प्रक्रम में स्मरणार्थ सब सिद्धान्तों को एकट्ठा कर लिखते हैं ।

(१) *लेब्निज़ का सिद्धान्त,*

$$\frac{ता^{न}स}{ताय^{न}} = ल \cdot \frac{ता^{न}र}{ताय^{न}} + न \cdot \frac{ता^{न-१}र}{ताय^{न-१}} \cdot \frac{ताल}{ताय} + \frac{न(न-१)}{२} \cdot \frac{ता^{न-२}र}{ताय^{न-२}} \cdot \frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}}$$
$$+ \cdots\cdots + र \cdot \frac{ता^{न}ल}{ताय^{न}} ।$$

(२) म्याक्लारिन् का सिद्धान्त,

$$स = त + त_{१} \cdot य + त_{२} \cdot \frac{य^{२}}{१ \cdot २} + त_{३} \cdot \frac{य^{३}}{१ \cdot २ \cdot ३} + \cdots\cdots$$

यहाँ $त = फ(य)$ यदि $य = ०$

$त_{१} = फ'(य)$ यदि $य = ०$

$त_{२} = फ''(य)$ यदि $य = ०$ इत्यादि

(३) डेमाइवर का सिद्धान्त,

$$(कोज्याय \pm ज्याय\sqrt{-१})^{म} = कोज्यामय \pm ज्यामय\sqrt{-१} ।$$

(४) टेलर का सिद्धान्त,

$$फ(य+च) = फ(य) + फ'(य)\frac{च}{१} + फ''(य)\frac{च^{२}}{१ \cdot २} + फ'''(य)\frac{च^{३}}{\lfloor ३} + \cdots\cdots$$

(५) टेलर के सिद्धान्त से किसी समीकरण में अज्ञातराशि का आसन्नमान,

$$\text{य} = \text{क} - \frac{\text{फ}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})} \text{। (य का अटकल से पहला मान = क) .}$$

यहाँ समीकरण का रूप ऐसा बनाना चाहिये जिस में फ (य) = ० हो ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) $\text{र} = \text{छे}^{-1}\left(\frac{\text{क} - \text{ख}\cdot\text{य}}{\text{ख} - \text{कय}}\right)$ इसका तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$\text{उत्तर } \frac{\text{ता र}}{\text{ता य}} = \frac{\sqrt{\text{क}^{2} - \text{ख}^{2}}}{(\text{क} - \text{ख}\cdot\text{य})\sqrt{१ - \text{य}^{2}}} \text{।}$$

(२) $\text{र} = \frac{२५\,\text{य}^{2} + ३०\,\text{य}}{५१}$ इसका दूसरा सम्बन्ध निकालो ? ।

$$\text{उत्तर } \frac{\text{ता}^{2}\text{र}}{\text{ताय}^{2}} = \frac{५०}{५१} \text{।}$$

(३) $\text{र} = \text{ज्या}^{-1}\left(\frac{\text{य}}{\text{क}}\right)$ इसका तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$\text{उत्तर} = \frac{\text{ता}^{3}\text{र}}{\text{तार}^{3}} = \frac{१ + \frac{३\,\text{य}^{2}}{\text{क}^{2} - \text{य}^{2}}}{(\text{क}^{2} - \text{य}^{2})^{\frac{3}{2}}} \text{।}$$

(४) $\text{र} = \frac{३}{२ + \text{य}^{2}}$ इसका चौथा तात्कालिकसम्बन्ध क्या है ?

$$\text{उत्तर } \frac{\text{ता}^{4}\text{र}}{\text{ताय}^{4}} = ७२\,\frac{५\,\text{य}^{4} - २०\,\text{य}^{2} + ४}{(२ + \text{य}^{2})^{5}} \text{।}$$

(५) $\text{र} = \text{इ}^{\text{य}}\cdot\text{ज्याय}$ इसका न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ?

$$\text{उत्तर } \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताय}^{\text{न}}} = २^{\frac{\text{न}}{2}}\cdot\text{इ}^{\text{य}}\cdot\text{ज्या}\left(\text{य} + \frac{\text{न}\pi}{४}\right) \text{।}$$

(६) $\text{य} = \text{क}\cdot\text{कोज्याप} + \text{अ}\cdot\text{ज्याप}$ और $\text{र} = \text{क}\cdot\text{ज्याप} - \text{अ}\cdot\text{कोज्याप}$ तो सिद्ध करो कि यदि न विषम हो तो

$$\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{य}}{\text{ताप}^{\text{न}}} \times \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{र}}{\text{ताप}^{\text{न}}} = \text{ज्या}२\text{प}\left(\frac{\text{अ}^{2} - \text{क}^{2}}{२}\right) + \text{अक}\cdot\text{कोज्या}\,२\,\text{प} \text{।}$$

(७) य·ला$_य$=र, इसका तीसरा तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ?

उत्तर $\frac{ता^३र}{ताय^३} = -\frac{१}{य^२}$ ।

(८) ज्याय·ला$_य$=र, इसका दूसरा सम्बन्ध निकालो ।

उत्तर $\frac{ता^२र}{ताय^२} = \frac{२कोज्याय}{य} - र - \frac{ज्याय}{य^२}$ ।

(९) र=य^न · ला$_य$ तो सिद्ध करो कि $\frac{ता^{न+१}र}{ताय^{न+१}} = \frac{|न}{य}$

(१०) र=ज्या २ य+स्प २ य तो दूसरा सम्बन्ध क्या होगा ?

उत्तर $४\left(\frac{२ स्प२य}{कोज्या^२ २य} - ज्या ~२ ~य\right) = \frac{ता^२ र}{ताय^२}$ ।

(११) यदि र=कोज्याय · ज्या३य तो न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होग ?

उत्तर, $\frac{ता^नर}{ताय^न} =$

$$२^{न-१}\left\{ज्या\left(२ य + \frac{न\cdot\pi}{२}\right) + २^न\cdot ज्या\left(४ य + \frac{न\cdot\pi}{२}\right)\right\}।$$

(१२) यदि र=४ ज्याय·ज्या २ य·ज्या ४ य तो न संख्यक तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा ?

$$उत्तर, \frac{ता^नर}{ताय^न} = २^न\left\{ज्या\left(२य + \frac{न\cdot\pi}{२}\right) + ३^न ज्या\left(६य + \frac{न\cdot\pi}{२}\right)\right.$$

$$\left. + ४^न(-१)^न\cdot ज्या\left(\pi\frac{न+४}{२} - ८य\right)\right\} ।$$

(१३) र=ज्याय·कोज्याय तो लेब्नित्ज के सिद्धान्त से

सिद्ध करो कि $२^{न-१}\cdot ज्या\left(२य + \frac{\pi\cdot न}{२}\right)$

$$= कोज्याय\cdot ज्या\left(य + \frac{न\cdot\pi}{२}\right) + न\cdot ज्या\left(य + \pi\frac{न-१}{२}\right)\cdot कोज्या\left(य + \frac{\pi}{२}\right)$$

$$+ न\frac{(न-१)}{२}\cdot ज्या\left(य+\pi\frac{न-२}{२}\right)\cdot कोज्या\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)$$

$$+\frac{न(न-१)(न-२)}{२\cdot३}ज्या\left(य+\pi\cdot\frac{न-३}{२}\right)\cdot कोज्या\left(य+\frac{३\pi}{२}\right)$$

$$+\cdots\cdots+ज्याय\cdot कोज्या\left(य+\frac{न\cdot\pi}{२}\right)।$$

(१४) $र=इ^{य}\cdot ज्याय$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}}=इ^{य}\left\{ज्याय+न\cdot ज्या\left(य+\frac{\pi}{२}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{न(न-१)}{२}ज्या\left(य+\frac{२\pi}{२}\right)+\cdots\right\}।$$

(१५) $र=य^{न}\cdot इ^{य}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}}=इ^{य}\cdot\underline{|न}\left\{१+न\cdot य+\frac{न(न-१)}{\underline{|२}\,\underline{|२}}\cdot य^{२}+\frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}\,\underline{|३}}य^{३}\right.$$

$$\left.+\frac{न(न-१)(न-२)(न-३)}{\underline{|४}\,\underline{|४}}य^{४}+\cdots\cdots\right\}।$$

(१६) $र=ज्याय$ तो सिद्ध करो कि

$\frac{ता^{२न}र}{ताय^{२न}}=र$ (यदि न समसंख्या है)।

(१७) $र=रप$ (लाय), इसका तात्कालिकसम्बन्ध क्या होगा।

उत्तर $\frac{र^{२}+१}{य}=\frac{तार}{ताय}$।

(१८) $र=अ\cdot क\cdot रप^{-१}\frac{य+क}{अ}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ता^{न}र}{ताय^{न}}=$$

$$\frac{क\,\underline{|न-१}}{अ^{न-१}}कोज्या\left\{\left(न\cdot रप^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)+(न-१)\frac{\pi}{२}\right\}$$

$$\left\{कोज्या^{न}\left(रप^{-१}\frac{य+क}{अ}\right)\right\}।$$

(१९) $\text{य} = \text{म}\cdot\text{स्प}\,(\text{र} - \text{नय})$ इस में य के घातवृद्धि में र का मान निकालो?

$$\text{उत्तर, } \text{र} = \left(\text{न} + \frac{१}{\text{म}}\right)\text{य} - \frac{१}{३\,\text{म}^3}\cdot\text{य}^3 + \frac{१}{५\,\text{म}^5}\cdot\text{य}^5 - \cdots\cdots \text{।}$$

(२०) $\text{य} = \text{म}\cdot\text{ज्या}\,(\text{र} + \text{नय})$ यहाँ र का य घातवृद्धि में क्या मान है?

$$\text{उत्तर } \text{र} = \left(\frac{१}{\text{म}} - \text{न}\right)\text{य} + \frac{१}{२}\cdot\frac{\text{य}^3}{३\,\text{म}^3} + \frac{१\cdot३}{२\cdot४}\cdot\frac{\text{य}^5}{५\,\text{म}^5} + \cdots\cdots \text{।}$$

(२१) $३\cdot\text{इ}^{\text{य}} + २$ इस का लघुरिक्थ य के घातवृद्धि में लावो?

$$\text{उत्तर ला } (३\,\text{इ}^{\text{य}} + २) = \text{ला}_5 + \frac{३}{५}\text{य} + \frac{३}{२५}\cdot\text{य}^2 - \frac{१}{१२५}\cdot\text{य}^3 \text{ इत्यादि ।}$$

(२२) $\text{इ}^{\text{य}\cdot\text{छेय}} = \text{र}$, यहाँ र का मान य के घातवृद्धि में लावो?

$$\text{उत्तर } \text{र} = १ + \text{य} + \frac{\text{य}^2}{२} + \frac{२}{३}\cdot\text{य}^3 + \cdots\cdots \text{।}$$

(२३) $\text{ला}\,(१ + \text{स्पय})$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो?

$$\text{उत्तर ला } (१ + \text{स्पय}) = \text{य} - \frac{\text{य}^2}{२} + \frac{२\,\text{य}^3}{३} - \cdots\cdots \text{।}$$

(२४) ला (ज्याय) इस का मान सिद्ध करो कि

$$-\left\{२\,\text{ज्या}^2\left(\frac{\pi}{४} - \frac{\text{य}}{२}\right) + २\,\text{ज्या}^4\left(\frac{\pi}{४} - \frac{\text{य}}{२}\right) + \frac{८}{२}\text{ज्या}^6\left(\frac{\pi}{४} - \frac{\text{य}}{२}\right) + \frac{१६}{४}\text{ज्या}^8\left(\frac{\pi}{४} - \frac{\text{य}}{२}\right) + \text{ज्या}^{10}\left(\frac{\pi}{४} - \frac{\text{य}}{२}\right) + \cdots\right\}$$

ऐसा होगा?।

(२५) $(\text{ज्याय})^{\text{न}} = \text{र}$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो?

$$\text{उत्तर } \text{र} = \text{य}^{\text{न}}\left\{१ - \text{न}\frac{\text{य}^2}{\lfloor ३} + \frac{\text{न}\,(५\text{न} - २)}{३}\cdot\frac{\text{य}^4}{\lfloor ५} - \cdots\cdots\right\} \text{।}$$

(२६) $\text{र} = \text{ला}\,\{१ + (\text{य}^2 + \text{क}\cdot\text{य})\}$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो?

उत्तर, $\text{ला}\,\{१ + (\text{य}^2 + \text{क}\cdot\text{य})\}$

$$=\text{क}\cdot\text{य}+(२-\text{क}^२)\frac{\text{य}^२}{२}+\text{क}(\text{क}^२-३)\frac{\text{य}^३}{३}+\cdots\cdots।$$

(२७) $\text{ला}\{\text{क}(\text{य}+[१+\text{य}^२]^{\frac{१}{२}})\}$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ?।

उत्तर, $\text{ला}\{\text{क}(\text{य}+[१+\text{य}^२]^{\frac{१}{२}})\}$

$$=\text{लाक}+\text{य}-\frac{\text{य}^३}{२\cdot३}+\frac{१\cdot३}{२\cdot४\cdot५}\cdot\text{य}^५-\cdots।$$

(२८) ला (१ + उज्याय) इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ?।

$$\text{उत्तर ला}(१+\text{उज्याय})=\frac{\text{य}^२}{\lfloor२}-\frac{\text{य}^४}{\lfloor३}+\frac{२३}{४}\cdot\frac{\text{य}^६}{\lfloor५}-\cdots\cdots।$$

(२९) ला (छेय) इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ?।

$$\text{उत्तर ला}(\text{छेय})=\frac{\text{य}^२}{२}+\frac{\text{य}^४}{३\cdot४}+\cdots\cdots।$$

(३०) $\text{ला}_{\text{य}}=(\text{य}^१-\text{य}^{-१})-\frac{१}{२}(\text{य}^२-\text{य}^{-२})+\frac{१}{३}(\text{य}^३-\text{य}^{-३})$
$-\frac{१}{४}(\text{य}^४-\text{य}^{-४})+\cdots\cdots$ इसे सिद्ध कर

अब इसी पर से सिद्ध करो कि

$\text{ज्याय}=\frac{१}{२}(\text{य}+\text{ज्या}२\text{य})-\frac{१}{३}\text{ज्या}३\text{य}+\frac{१}{४}\text{ज्या}४\text{य}-\frac{१}{५}\text{ज्या}५\text{य}+\cdots।$

(३१) तीसवें प्रश्न पर से इसे सिद्ध करो कि,

$\text{कोज्याय}=\frac{१}{२}+\text{कोज्या}२\text{य}-\text{कोज्या}३\text{य}+\text{कोज्या}४\text{य}-\text{कोज्या}५\text{य}+\cdots$

(३२) $\frac{\text{य}^{\text{न}},\ \text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)}{\text{न}+१}$ इसे यदि म्याक्लारिन के सिद्धान्त से य के घातवृद्धि में लावें तो पहले पद का क्या प्रमाण होगा ?।

उत्तर $\frac{\text{य}^{\text{न}+१}}{\text{न}+१}$।

(३३) $\text{य}\cdot\text{ज्या}^{-१}\text{य}\cdot\text{स्प}^{-१}\text{य}$ इसे म्याक्लारिन् के सिद्धान्त से य के घातवृद्धि में लावें तो तीसरे पद का क्या प्रमाण होगा ?।

उत्तर $\frac{१५८\text{य}^७}{\lfloor६}$।

(३४) $\sqrt{१ - \text{कोज्याय}}$ इस का मान य के घातवृद्धि में लावो ?।

$$\text{उत्तर} \sqrt{२}\left\{\frac{य}{२} - \frac{य^३}{८\lfloor३} + \frac{य^५}{३२\lfloor५} - \cdots\cdots\right\}।$$

(३५) यदि चाप (य) बहुत छोटा हो तो सिद्ध करो कि

$य = \sqrt[३]{२\,(\text{१२य} - \text{ज्याय})}$ स्वल्पान्तर से।

(३६) डेमाइवर के सिद्धान्त से यह सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या}^{म}\text{य} \mp \frac{म(म-१)}{२}\cdot\text{कोज्या}^{म-२}\text{य}\cdot\text{ज्या}^{२}\text{य}$$

$$\pm \frac{म(म-१)(म-२)(म-३)}{\lfloor४}\text{कोज्या}^{म-४}\text{य}\cdot\text{ज्या}^{४}\text{य}$$

$$\mp \cdots + (-१)^{\frac{म}{२}}\text{ज्या}^{म}\text{य} = \text{कोज्यामय}$$

$$\text{और} \pm म\cdot\text{कोज्या}^{म-१}\text{य}\cdot\text{ज्याय} \mp \frac{म(म-१)(म-२)}{\lfloor३}\cdot\text{कोज्या}^{म-३}\text{य}\cdot\text{ज्या}^{३}\text{य}$$

$$\pm \frac{म(म-१)(म-२)(म-३)(म-४)}{\lfloor५}\cdot\text{कोज्या}^{म-५}\text{य}\cdot\text{ज्या}^{५}\text{य} \mp \cdots = \pm\text{ज्यामय}$$

(यहाँ म सम संख्या है)।

(३७) सिद्ध करो कि

$$\frac{४-\pi}{८} = \frac{१}{२^{२}-१} + \frac{१}{२^{२}\cdot२^{२}-१} + \frac{१}{२^{२}\cdot३^{२}-१} + \frac{१}{२^{२}\cdot४^{२}-१} + \cdots।$$

(३८) सिद्ध करो कि

$$\pi\,\frac{e^{\pi}+१}{e^{\pi}-१} = २^{२}\left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{५} + \frac{१}{१०} + \frac{१}{१७} + \frac{१}{२६} + \cdots\cdots\right\}।$$

(३९) सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi}{८} = \frac{१}{३} + \frac{१}{३५} + \frac{१}{९९} + \frac{१}{१९५} + \frac{१}{३२३} + \cdots\cdots।$$

(४०) सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi^{२}}{१६} = \left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{५} + \frac{१}{१०} + \frac{१}{२०} + \cdots\right\}\left\{\frac{१}{२} + \frac{१}{१०} + \frac{१}{२६} + \frac{१}{५०} + \frac{१}{८२} + \cdots\right\}।$$

(४१) यदि य बहुत छोटा हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{छेय} = 1 + \frac{44\,\text{य}^2}{\pi^2} \text{ स्वल्पान्तर से।}$$

(४२) टेलर के सिद्धान्त से यह सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}^{-1}2\text{य} = \text{ज्या}^{-1}\text{य} + \frac{\text{य}}{\sqrt{1-\text{य}^2}} + \frac{\text{य}^3}{(1-\text{य}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1+2\text{य}^2}{(1-\text{य}^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\text{य}^3}{\underline{|3}} + \frac{3\text{य}(3+2\text{य}^2)}{(1-\text{य}^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot \frac{\text{य}^4}{\underline{|4}} + \ldots\ldots \text{।}$$

(४३) यदि र = कोज्या$^{-1}$(य + च) तो सिद्ध करो कि

$$\text{र} = \text{ज्या}^{-1}(1-\text{य}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\text{च}}{\sqrt{1-\text{य}^2}} - \frac{\text{य}}{(1-\text{य}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}}$$

$$- \frac{1+2\text{य}^2}{(1-\text{य}^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\text{च}^3}{\underline{|3}} - \frac{3\text{य}(3+2\text{य}^2)}{(1-\text{य}^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot \frac{\text{च}^4}{\underline{|4}} - \ldots\ldots \text{।}$$

(४४) यह सिद्ध करो कि

$$\text{छे}(\text{य}+\text{च}) = \text{छेय} + \text{छे}^2\text{य} \cdot \text{ज्याय} \cdot \text{च} + \text{छे}^3\text{य}(1+\text{ज्या}^2\text{य}) \cdot \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}} + \cdots \text{।}$$

(४५) यह सिद्ध करो कि

$$\text{छे}^{-1}(\text{य}+\text{च}) = \text{ज्या}^{-1}\frac{\sqrt{\text{य}^2-1}}{\text{य}} + \frac{\text{च}}{\text{य}\sqrt{\text{य}^2-1}} + \frac{1-2\text{य}^2}{\text{य}^2\sqrt{\text{य}^2-1}} \cdot \frac{\text{च}^2}{\underline{|2}} + \cdots \text{।}$$

(४६) टेलर के सिद्धान्त से पहले सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{-1}(\text{य}+\text{च}) = \text{स्प}^{-1}\text{य} + \text{च} \cdot \text{ज्या}^2\text{प} - \frac{\text{च}^2}{2} \cdot \text{ज्या}^2\text{प} \cdot \text{ज्या}\,2\text{प}$$

$$+ \frac{\text{च}^3}{3}\text{ज्या}^3\text{प} \cdot \text{ज्या}3\text{प} - \frac{\text{च}^4}{4} \cdot \text{ज्या}^4\text{प} \cdot \text{ज्या}\,4\text{प} + \ldots\ldots$$

(यहां $\text{प} = \frac{\pi}{2} - \text{स्प}^{-1}\text{य}$) तब इस पर से यह सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{-1}\text{य} = \text{कोज्याप} \cdot \text{ज्याप} + \frac{\text{कोज्या}^2\text{प} \cdot \text{ज्या}2\text{प}}{2} + \frac{\text{कोज्या}^3\text{प} \cdot \text{ज्या}\,3\,\text{प}}{3}$$

$$+ \frac{\text{कोज्या}^4\text{प} \cdot \text{ज्या}\,4\,\text{प}}{4} + \ldots\ldots\ldots \text{।}$$

(४७) यदि र=फ (य) तो सिद्ध करो कि

$$फ\left(\frac{९य}{५}\right)=र+\frac{तार}{ताय}\cdot\frac{४य}{५}+\frac{ता^{२}र}{ताय^{२}}\cdot\frac{१६}{२५}\cdot\frac{य^{२}}{\lfloor २}+\frac{ता^{३}र}{ताय^{३}}\cdot\frac{६४}{१२५}\cdot\frac{य^{3}}{\lfloor ३}+\cdots।$$

(४८) र=फ (य) और फ(अ − य)=स तो सिद्ध करो कि,

$$र=स+\frac{तास}{ताय}(२य-अ)+\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}}(२य-अ)^{२}\cdot\frac{१}{\lfloor २}$$
$$+\frac{ता^{३}स}{ताय^{३}}(२य-अ)^{३}\cdot\frac{१}{\lfloor ३}-\cdots\cdots।$$

(४९) $\sqrt{य^{३}+१४य^{२}-२८८}$ इसे यदि टेलर के सिद्धान्त में फ (य) कल्पना करें उस पर से फ (य+च) इस का मान लावें तो य किस के तुल्य करने से टेलर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा?।

उत्तर $\begin{cases} य=-१२। \\ य=+४। \\ य=-६। \end{cases}$

(५०) $य^{५}-य=य^{४}+१५$ इस समीकरण में आसन्नमान से य का एक मान कौन है?। उत्तर य=२·०२१।

(५१) $२य^{३}+३य^{२}+२य=८८$ इस में य का एक मान कौन है?। उत्तर य=३·००८।

(५२) एक जात्यत्रिभुज का क्षेत्रफल ३०$\frac{१}{२}$ और भुजकर्ण का अन्तर ८ है तो भुज, कोटि और कर्ण का पृथक् पृथक् क्या मान होगा?

उत्तर भु=$५\frac{१२१}{१८४०}$ को=$१२\frac{३८८}{९३२१}$ कर्ण=$१३\frac{१२१}{१८४०}$ स्वल्पान्तर से।

(५३) एक काशीवासी को मथुरावृन्दावन जाने की इच्छा हुई उसने मार्ग चलने का नियम अपने मन में यह ठहराया कि पहले दिन एक कोश दूसरे दिन सोलह कोश तीसरे दिन ८१ कोश य दिन में $य^{४}$ कोश चलेंगे परन्तु दूसरे क्षण में विचारा कि नहीं ऐसे चलने में क्लेश होगा य दिन के अन्त्य में एकरूप से एक दिन में चलने की जो गति हो उस गति से प्रतिदिन चलेंगे पुनः तीसरे क्षण में विचारा कि

नहीं इस गति की जो गति एक दिन में एकरूप से होगी उस गति से चलेंगे इसी प्रकार उस पुरुष ने दो बार और शोचा तो बताओ अन्त्य में वह मथुरावृन्दावन गया कि नहीं ?　　उत्तर, नहीं।

(५४) एक साहु ने एक पुरुष को इस नियम पर रक्खा कि पहले वर्ष में ५ रुपये दूसरे वर्ष में ३६ रुपये य वर्ष में $य^{४}+४$ रुपये तुमको मिलेंगे तुम हमारे यहाँ काम किया करो। य वर्ष के अनन्तर उस पुरुष ने कुछ अपराध किया इस लिये उस साहु ने कहा कि अब पिछले वर्ष के अन्त्य में जो तुमारे तनख्वाह का एकचाल से एक वर्ष में बढ़ने का प्रमाण है उतना इस वर्ष में दूँगा और दूसरे वर्ष में पिछली तनख्वाह का एकचाल से जो एक वर्ष में गति हो उतना दूँगा यों प्रतिवर्ष में पिछली तनख्वाह के गतितुल्य तनख्वाह उस साहु ने देना नियत किया। अन्त्य में उस पुरुष ने विचारा कि नियमानुसार अब इस वर्ष के अन्त्य में साहु जी मुझे छोड़ावेंगे तो इससे अच्छा कि पहले ही से मैं छोड़ूं इस लिये उसने छ महीना काम कर अपनी नौकरी को छोड़ा तो बतावो कि नौकरी छोड़ती समय उस पुरुष ने कितना रुपया पाया ?

उत्तर ६०) रुपये।

इति चतुर्थोध्याय।